

עבודת קיץ למסיימי כיתה י' 4 יחידות:

מצורפת עבודת הקיץ במתמטיקה, שנועדה לעזור לכם לחזור על החומר, לשמור על כושר לימודי ולהגיע מוכנים היטב לשנה הבאה.

העבודה מחולקת לשלושה חלקים עיקריים ומקיפה את נושאי הלימוד המרכזיים של השנה:

חלק א': גיאומטריה אנליטית, גיאומטריה של המישור וטריגונומטריה

חלק ב': חדו"א (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי) – חקירה מלאה של פונקציות מורכבות, פונקציות מכפלה ופונקציות שורש.

חלק ג': הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

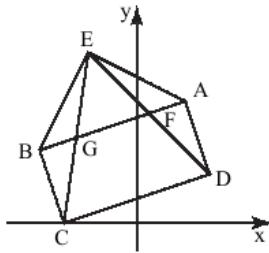
מועד ההגשה: יש להגיש את העבודה המלאה השבוע הראשון של החזרה ללימודים.

בחינה: במהלך השבוע הראשון לחזרה ללימודים תתקיים בחינה המבוססת על השאלות המופיעות בעבודה זו.

חופשה נעימה ובהצלחה!

חלק א': גיאומטריה אנליטית, גיאומטריה של המישור וטריגונומטריה:

שאלה 1



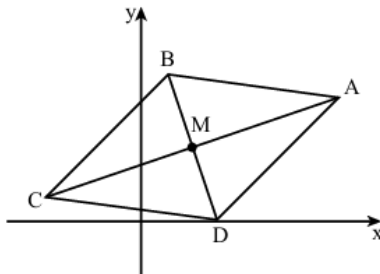
במרובע ABCD נתון: $A(2;5)$, $B(-4;3)$, $C(-3;0)$, $D(3;2)$.

- הראו שהמרובע ABCD הוא מלבן.
- הנקודה $E(-2;7)$ נמצאת מחוץ למלבן.
- הראו ש- $AE = BE$.
- הוכיחו: $\triangle ADE \cong \triangle BCE$.
- הוכיחו: $\angle AEG = \angle BEF$.

תשובות:

- הדרכה: הראו על ידי חישובי שיפועים, שצלעות סמוכות במרובע מאונכות זו לזו.

שאלה 2

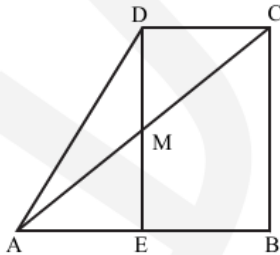


- לפניכם מעוין ABCD.
- אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה M.
- נתון: $A(8;5)$, $C(-4;1)$.
- א. מצאו את משוואת האלכסון BD.
- ב. נתון שהנקודה D נמצאת על ציר ה- x .
- מצא את שיעורי הנקודות D ו-B.
- ג. חשבו את זוויתיו של המעוין.

תשובות:

- א. $y = -3x + 9$. ב. $D(3;0)$, $B(1;6)$. ג. 53.13° , 126.87° , 53.13° , 126.87° .

שאלה 3

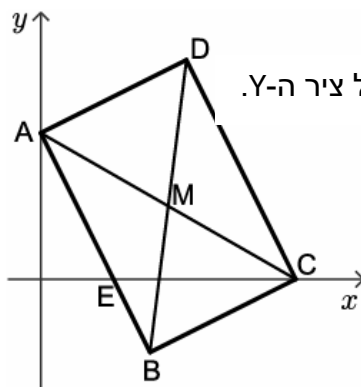


- ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). האלכסון AC חותך את גובה הטרפז DE בנקודה M.
נתון: $DM = ME$.
א. הוכיחו: $\triangle CDM \cong \triangle AEM$.
ב. הוכיחו: המרובע DCBE הוא מלבן.
ג. הוכיחו: $AE = BE$.
ד. נתון: $\angle BAC = 40^\circ$, $BE = 4$.
(1) חשבו את גובה הטרפז. (2) חשבו את אורך השוק AD.

תשובות:

ד. (1) 6.713 ס"מ. (2) 7.814 ס"מ.

שאלה 4



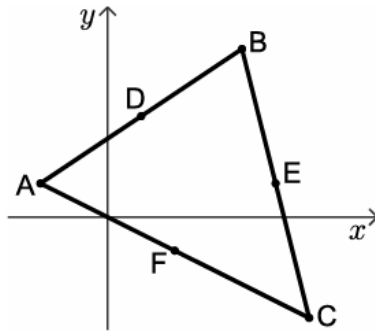
- המרובע ABCD הוא מקבילית. אורך הצלע $BC = AD = \sqrt{20}$.
נתון: $D(4, 6)$, $B(3, -2)$. הנקודה A נמצאת על ציר ה-Y.
א. מצאו שיעורי הנקודה A, אם נתון: $y_A < 6$.
ב. הוכיחו כי המרובע ABCD הוא מלבן.
ג. אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה M.
מצאו את שיעורי הקודקוד C.
הצלע AB חותכת את ציר ה-x בנקודה E.
ד. מצאו את שיעורי הקודקוד E.
ה. (1) הוכיחו כי המשולשים CBE ו-AOE דומים, ומצאו את יחס הדימיון.
(2) מצאו פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש AOE.
ו. חשבו את שטח המרובע ACBO.
ז. חשבו את גודל הזווית $\angle ACB$.

תשובות:

- א. $A(0, 4)$ ב. הוכחה. ג. $C(7, 0)$ ד. $E(2, 0)$
ה. (1) הוכחה, יחס הדימיון $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (2) פי 1.25 ו. 21 יח"ר ז. 56.31°

שאלה 5:

במשולש ABC הנקודות D, E, F הן אמצעי הצלעות AB, BC, AB בהתאמה.



א. הוכיחו כי המרובע ADEF הוא מקבילית.

נתון: $A(-2,1)$, $F(2,-1)$, $E(5,1)$, $D(1,3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה B.

ג. חשבו את שיעורי הנקודה C.

ד. הסבירו מדוע $\triangle DEF \sim \triangle CAB$.

ה. מהו היחס בין היקף המשולש DEF לבין היקף המשולש CAB?

ו. מהו היחס בין שטח המשולש DEF לשטח המשולש CAB?

ז. הוכיחו: $S_{\triangle ABF} = 2 \cdot S_{\triangle DEF}$.

תשובות:

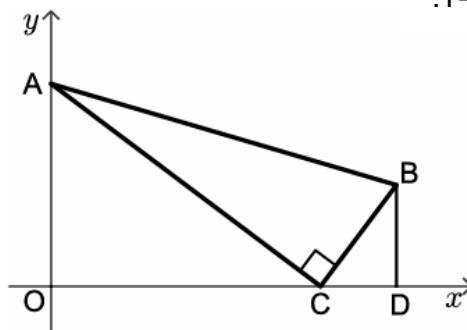
- א. הוכחה. ב. $B(4,5)$ ג. $C(6,-3)$ ד. הוכחה.
- ה. 1:2 ו. 1:4 ז. הוכחה.

שאלה 6:

במשולש ישר זווית ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) הקודקוד C מונח על ציר ה-x.

מהקודקוד B הורידו אנך לציר ה-x החותך אותו בנקודה D.

הנקודה O היא ראשית הצירים. הנקודה A מונחת על ציר ה-y.



א. הוכיחו: $\triangle AOC \sim \triangle CDB$.

ב. משוואת הצלע AC היא: $4y + 3x = 48$.

מצאו את אורך הצלע AO.

ג. נתון כי יחסי השטחים $\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{64}{9}$.

(1) מצאו את אורך הצלע CD.

(2) מצאו את אורכי הצלעות CO ו-BD.

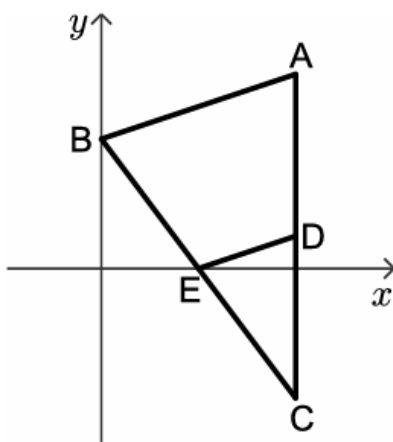
ד. (1) חשבו את גודל הזווית $\angle CBA$.

(2) האם המשולשים AOC ו-ACB דומים זה לזה? נמקו.

תשובות:

- א. הוכחה. ב. 12 יח"א $AO =$ ג. 4.5 יח"א $CD =$ ד. 69.44° (1) ד. (2) לא.

שאלה 7:

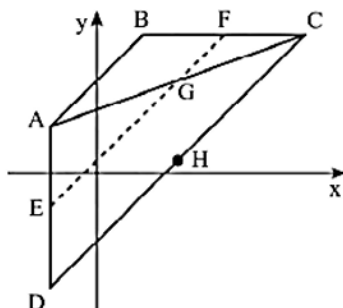


- בסרטוט שלפניכם מתואר משולש ABC.
 הקודקוד B נמצא על ציר ה- y , והצלע AC מקבילה לציר ה- y .
 נתון: $A(6,6)$, $AB = \sqrt{40}$.
 שיעור ה- y של הקודקוד B קטן מ-6.
 א. מצאו את שיעורי הקודקוד B.
 הנקודה E היא אמצע הצלע BC.
 נתון: הנקודה E נמצאת על ציר ה- x .
 ב. מצאו את שיעורי הנקודות C ו-E.
 הנקודה D היא אמצע הצלע AC.
 מן הנקודה E העבירו ישר המקביל לציר ה- y וחותר את הצלע AB בנקודה F.
 ג. (1) הוכיחו כי המרובע FADE הוא מקבילית.
 (2) חשבו את שטח המקבילית FADE.
 ד. מצאו את גודל הזווית $\angle DEF$.

תשובות:

- א. $B(0,4)$ ב. $E(3,0)$, $C(6,-4)$ ג. (1) הוכחה.
 ג. (2) 15 יח"ר. ד. $\angle DEF = 71.56^\circ$.

שאלה 8:



- במרובע ABCD נתונים הקדקודים :
 $D(-2; -5)$, $C(9; 6)$, $B(2; 6)$, $A(-2; 2)$
 א. הראו שהמרובע ABCD הוא טרפז.
 ב. EF הוא קטע אמצעים בטרפז.
 מצאו את משוואת הישר EF.
 ג. EF ו-AC נפגשים בנקודה G.
 (1) מצאו את שיעורי הנקודה G.
 (2) הראו על ידי חישוב ש- $AG = GC$.

ד. H היא נקודה כלשהי על הצלע DC. EF ו-AH נפגשים בנקודה K.
 הוכיחו: $AK = KH$ (ללא שימוש בשיעורי הנקודות במערכת הצירים).

תשובות:

א. $y = x + \frac{1}{2}$. ג. (1) $(3\frac{1}{2}; 4)$.

חלק ב': חדו"א – פונקציות מורכבות, פונקציות מכפלה ופונקציות שורש

שאלה 1

נתונה הפונקציה $f(x) = (x^2 - 4)^3$

- קבעו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הוכיחו כי הפונקציה היא פונקציה זוגית.
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- X ועם ציר ה- Y .
- מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
- רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x) + 2$

- הסבירו אילו טרנספורמציות בוצעו על הפונקציה $f(x)$
- רשמו את שיעורי נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבעו את סוגן.

תשובות:

- כל X . ב. הוכחה ג. $(-2, 0)$ $(2, 0)$ $(0, -64)$ ד. $\min(0, -64)$
- ה. ירידה: $x < 0$ עלייה $x > 0$
- ז. (1) הזזה אנכית 2 יחידות כלפי מעלה ושיקוף מול ציר ה- X . (2) $\max(0, 66)$

שאלה 2

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2(x - 3)^2$

- האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או אף לא אחת מהן? הוכיחו את תשובתכם.
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
- רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
- מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$
- ז. נתונה הפונקציה $h(x) = f(x + 2)$

- הסבירו איזו טרנספורמציה בוצעה על הפונקציה $f(x)$
- רשמו את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ ואת סוגן

תשובות:

א. לא זוגית ולא אי זוגית ב. $(0,0)$ $(3,0)$ ג. $\max(1.5, 5\frac{1}{16})$ $\min(0,0)$ $\min(3,0)$

ד. עלייה: $0 < x < 1.5$ או $3 < x$ ירידה: $x < 0$ או $1.5 < x < 3$

ו. $y = 4x$ ז. (1) הזזה אופקית 2 יחידות שמאלה (2)

$\min(1,0)$ $\min(-2,0)$ $\max(-0.5, 5\frac{1}{16})$

שאלה 3

נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 12}$

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. מצאו את כל נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגן.

ד. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

ו. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x - 2) + 4$, רשמו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוגן.

תשובות:

א. תחום הגדרה: $x \leq 2$ או $x \geq 6$ ב. $(0, 2\sqrt{3})$ $(2,0)$ $(6,0)$

ג. $\min(2,0)$ קיצון קצה $\min(6,0)$ קיצון קצה

ד. עלייה: $6 < x$ ירידה: $x < 2$

ו. $\min(8,4)$ קיצון קצה $\min(4,4)$ קיצון קצה

נתונה הפונקציה $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - מצאו את נקודת הקיצון הפנימית ואת נקודת הקיצון בקצה התחום, וקבעו את סוגן.
 - רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
 - כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = -0.5$
- תשובות:

- תחום הגדרה: $x \geq 0$. א. $(0,0)$ $(4,0)$ ג. $(0,0)$ קיצון קצה $\max(1, -1)$
- עלייה: $x < 1$ ירידה: $0 < x < 1$ ו. 2 פתרונות

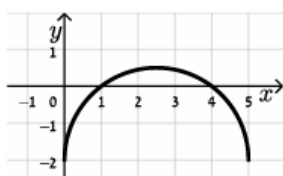
שאלה 5

נתונה הפונקציה: $f(x) = -2 + \sqrt{-x^2 + 5x}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x ?
 - מצאו את השיעורים של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 - מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$?
 - ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x) + c$ (פרמטר) שתחום הגדרתה הוא תחום ההגדרה של $f(x)$.
- מה הם כל ערכי c שבעבורם הפונקציה $g(x)$ חיובית בכל תחום הגדרתה?

תשובות:

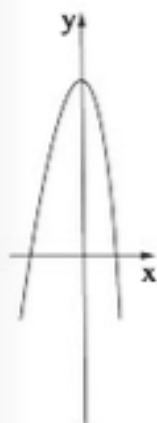
- | קיצון קצה | קיצון קצה |
|---|---|
| א. $0 \leq x \leq 5$ | ב. $(1,0)$, $(4,0)$ |
| ג. $\min(0, -2)$, $\max(2.5, 0.5)$, $\min(5, -2)$ | ד. עולה: $0 < x < 2.5$, יורדת: $2.5 < x < 5$ ה. סקיצה: |
| | ו. $c > 2$ |



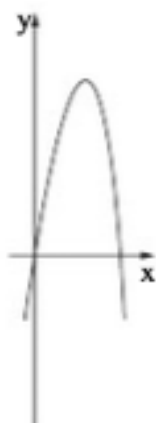
שאלה 6:

נתונה הפונקצייה $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}x + 5}$.

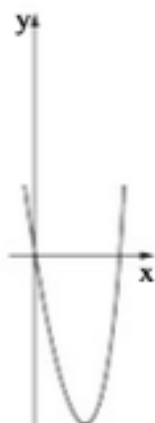
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- מצאו את שיערי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- אחד מן הגרפים I – IV שבסוף השאלה מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



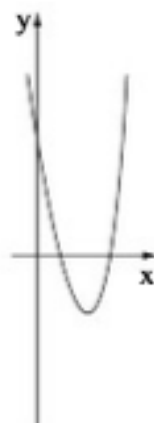
IV



III



II



I

תשובות:

- תחום הגדרה $x \leq 10$. ב. $(0,0)$ $(10,0)$
- $(10,0)$ קיצון קצה $\min(8,64)$ $\max(0,0)$. ה. 3.

שאלה 7

נתונה הפונקציה: $f(x) = ax \cdot \sqrt{12-x}$. $a > 0$ הוא פרמטר.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4$ הוא 9. מצאו את a .
 - מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x) - k$, הפונקציה $g(x)$ משיקה לציר ה- x . מצאו את k .

תשובות:

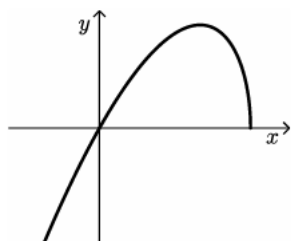
קיצון קצה

א. $x \leq 12$. ב. $a = 2$. ב. $(12, 0)$, $(0, 0)$. ג. $\min(12, 0)$ $\max(8, 32)$

סרטוט לסעיף ד:

ה. $k = 32$

ד. ראו סרטוט בצד.

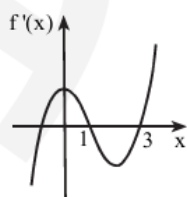


חלק ג': הקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת שלה

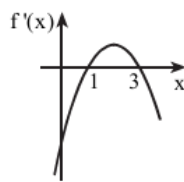
שאלה 1

לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון בלבד – נקודת מקסימום ב- $x=1$ ונקודת מינימום ב- $x=3$. נתון שהנגזרת $f'(x)$ מתאפסת פעמיים בלבד.

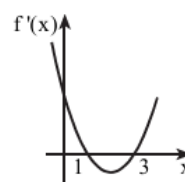
א. עבור אילו ערכי x מתקיים: (1) $f'(x)=0$ (2) $f'(x)>0$ (3) $f'(x)<0$.
ב. איזה מן הגרפים הבאים (1, 2, 3, 4) יכול לתאר את הגרף של $f'(x)$, הנגזרת של $f(x)$?



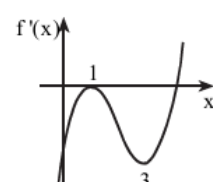
גרף 1



גרף 2



גרף 3



גרף 4

תשובות:

א. (1) $x=1$, $x=3$ (2) $x > 3$ או $x < 1$ (3) $1 < x < 3$. ב. גרף 3.

שאלה 2

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ב. נתון: $f(0)=0$.

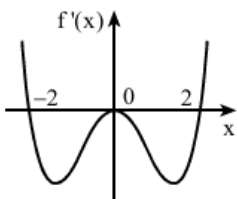
שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. לגרף הפונקציה $f(x)$ העבירו משיקים המקבילים לציר ה- x .

מהם שיעורי ה- x של נקודות ההשקה של המשיקים האלה?

ד. נתון גם כי משוואת הפונקציה $f(x)$ היא $f(x)=3x^5-20x^3$.

מצאו את משוואות המשיקים שבסעיף ג'.



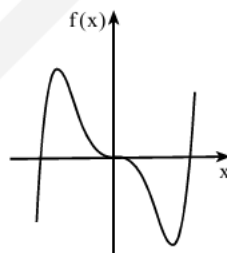
תשובות

א. עלייה: $x < -2$ או $x > 2$,

ירידה: $-2 < x < 2$.

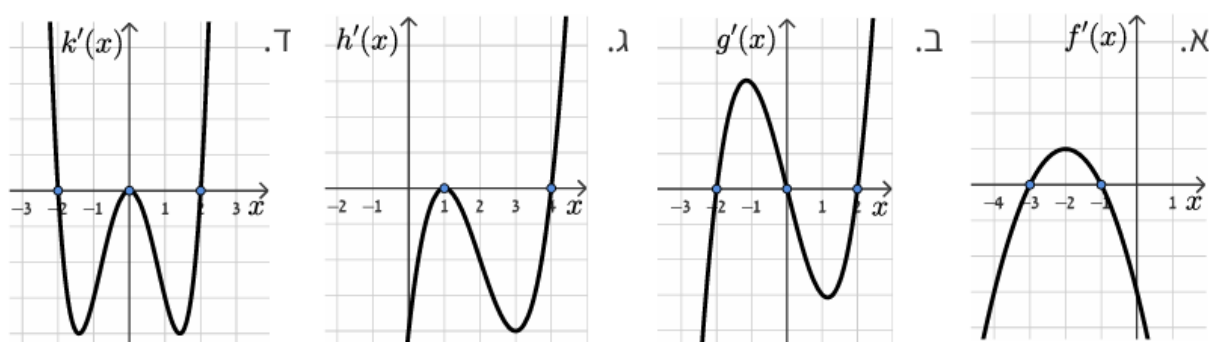
ג. $x=-2$, $x=0$, $x=2$.

ד. $y=-64$, $y=64$, $y=0$.



שאלה 3

לפניכם הגרפים של הפונקציות $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$, $k'(x)$ שהן פונקציות הנגזרת של הפונקציות $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ בהתאמה. מצאו על פי הנתונים שבסרטוט את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ וקבעו את סוגן.



תשובות:

עבור $f(x)$: $\min: x = -3$, $\max: x = -1$

עבור $g(x)$: $\min: x = 2$, $\max: x = 0$, $\min: x = -2$

עבור $k(x)$: $\min: x = 2$, $\max: x = -2$