

2025

עבודת קיץ 5 יח"ל לעולים לכיתה י"א

שלום תלמידים ותלמידות,

להלן עבודת קיץ ללומדים בכיתה יוד ברמת 5 יח"ל.

את העבודה יש להגיש **בשיעור המתמטיקה הראשון** בתחילת השנה **בקלסר מנילה בלבד**. יש לסדר את הפתרונות **המלאים** והמסודרים של כל השאלות **ע"פ הסדר שהן מופיעות בעבודה**. לא לשכוח **לרשום שם מלא** בעמוד הראשון של העבודה בכתב ברור וקריא.

לנוחותכם, גם במהלך החופש ניתן להיעזר באתר "גול" כדי ללמוד ולהיזכר בנושאים השונים. להלן תזכורת באופן הגישה אליו:

1. חפשו בגוגל "gool bagrut"
2. היכנסו לאתר הראשון בתוצאות החיפוש (bagrut.gool.co.il)
3. חצו על "הזדהות משרד החינוך" והתחברו לאתר
4. מצאו את הקורס "שאלון 571 לכיתות י" ולחצו "לעמוד הקורס"
5. פתחו את הקטגוריה אותה תרצו ללמוד או לתרגל (למשל "גאומטריה")
6. מצאו את הפרק הרלוונטי (למשל "פרק 14 – משולשים") ולחצו "צפה בפרק"
7. בחרו את הנושא הנדרש וצפו בסרטונים בתפריט שייפתח

בית חינוך תיכון ע"ש חיים
מצויינות • ערכים • חברה

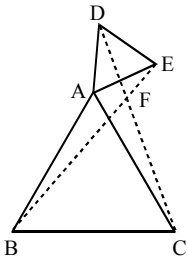
עבודה נעימה ופורייה!

בהצלחה וחופש מהנה ונעים,
צוות מתמטיקה.



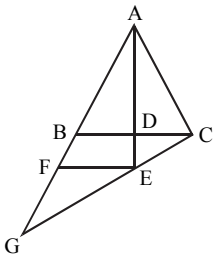
גאומטריה

בעיות עם משולשים ומרובעים (כולל פרופורציה ודמיון)

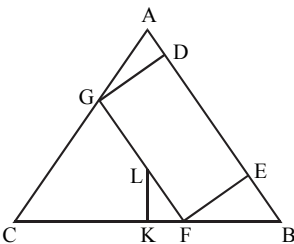


1. המשולשים ABC ו- ADE הם משולשים
שווי-צלעות. הקטעים BE ו- CD
נחתכים בנקודה F.
א. הוכח: $BE = CD$.
ב. הוכח: $\angle ACD = \angle ABE$.
ג. חשב את הזווית BFC.

תשובה: ג. 60° .

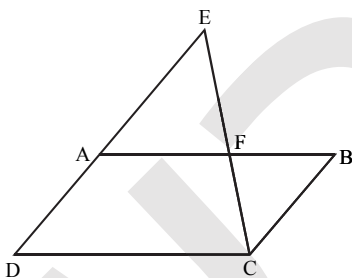


2. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש
שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$).
G היא נקודה על המשך הצלע AB.
הקטע FE מקביל ל- BC.
נתון: $\frac{GF}{BF} = \frac{AG}{AC}$. הוכח: $AE \perp BC$.



3. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AC = AB$) חסום מלבן GFED (ראה ציור).
נקודה L, הנמצאת על צלע המלבן GF,
היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
דרך הנקודה L העבירו אנך לצלע BC,
החותך את BC בנקודה K.
א. הוכח: $\triangle KAB \sim \triangle KLF \sim \triangle EFB$.
ב. נתון: $AB = 15$ ס"מ, $BC = 18$ ס"מ.
חשב את אורכי הקטעים KF ו- EF.

תשובה: ב. 3 ס"מ, 4.8 ס"מ.



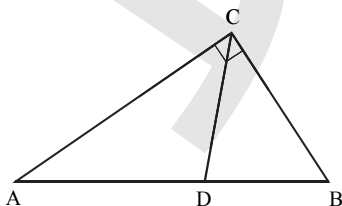
4. המרובע ABCD הוא מקבילית (ראה ציור).

א. הוכח: $\frac{BF}{FA} = \frac{AD}{AE}$.

ב. (1) הוכח: $\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD}{AE}$.

(2) היעזר בסעיף א' ובתת סעיף ב' (1),

והוכח: $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle BEF}$.



5. במשולש ישר-זווית ACB ($\angle ACB = 90^\circ$)

CD חוצה-זווית ACB (ראה ציור).

א. (1) הוכח: $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$.

(2) נתון: $BC = 21$ מ"מ, $AC = 28$ מ"מ.

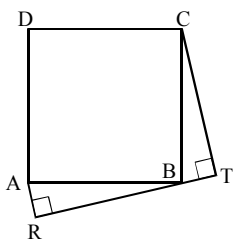
חשב את האורך של הקטע DB.

ב. מקדוד C מורידים אנך ליתר AB.

האנך חותך את היתר בנקודה N. הוכח כי $\frac{CN}{AC} = \frac{BC}{AB}$.

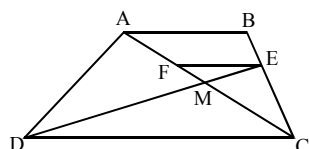
ג. חשב את האורך של הקטע DN.

תשובה: א. (2) 15 מ"מ. ג. 2.4 מ"מ.



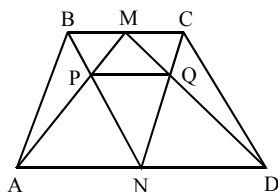
6. נתון ריבוע ABCD.
דרך הקדקוד B העבירו ישר TR.
AR ו-CT מאונכים לישר זה (ראה ציור).
א. הוכח כי $AR + CT = TR$.
ב. הבע את שטח המרובע ACTR באמצעות TR.

תשובה: ב. $\frac{1}{2}(TR)^2$.



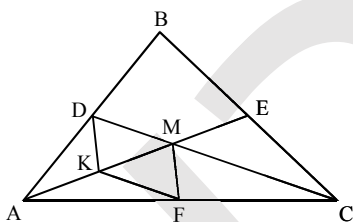
7. בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) מתקיים $DC = 2AB$.
הנקודה E נמצאת על השוק BC כך ש- $BC = 3BE$.
הנקודה F נמצאת על האלכסון AC כך ש- $FE \parallel DC$.
האלכסון AC והקטע DE נחתכים בנקודה M.
א. חשב את היחסים: (1) $\frac{FE}{AB}$ (2) $\frac{FE}{DC}$.
ב. הוכח: $MC = 3FM$.
ג. חשב את היחס $\frac{AM}{MC}$.

תשובה: א. (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{AM}{MC} = 1$.

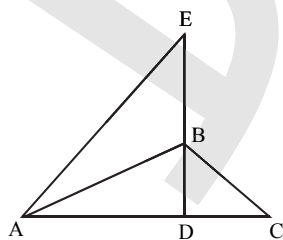


8. בטרפז ABCD ($BC \parallel AD$) הנקודות M ו-N הם אמצעי הבסיסים, הקטעים CN ו-DM נחתכים בנקודה Q, הקטעים AM ו-BN נחתכים בנקודה P (ראה ציור).
א. הוכח: $PQ \parallel AD$.
ב. נתון גם: $AD = 2a$, $BC = a$.
הבע באמצעות a את אורך הקטע PQ.

תשובה: ב. $\frac{2}{3}a$.



9. התיכונים AE ו-CD במשולש ABC נפגשים בנקודה M. נקודה K היא אמצע הקטע AM.
F היא נקודה על הצלע AC כך ש- $KF \parallel DC$ (ראה ציור).
הוכח: המרובע KDMF הוא מקבילית.

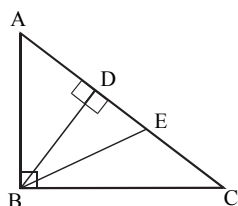


10. במשולש ABC, הגובה לצלע AC הוא BD. נקודה E נמצאת על המשך הגובה BD, כך ש-AB חוצה את הזווית EAC (ראה ציור).
נתון: $\angle BCA = 2 \cdot \angle BAC$.
א. הוכח: $BC \cdot ED = BD \cdot EA$.
ב. היעזר בנתונים ובסעיף א', והוכח: $BC \cdot ED = AD \cdot BE$.

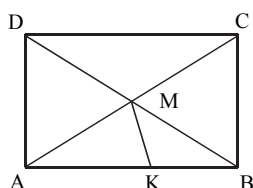
טריגונומטריה במישור (5 יחידות)

הערה:

השאלות כוללות שימוש בפונקציות סינוס, קוסינוס וטנגנס במשולש ישר-זווית, ושימוש במשפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים, כולל סימון נעלמים, הבעה על ידי פרמטרים ושטח משולש.



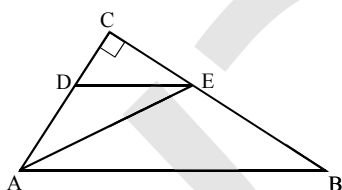
1. במשולש ישר-זווית ABC נתון: $AB = 6$ ס"מ, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$. BD הוא גובה ליתר. BE הוא חוצה-זווית של $\angle DBC$. הבע את אורך הקטע EC באמצעות α .
- תשובה: $6 \sin \alpha (\tan \alpha - \tan \frac{\alpha}{2})$.



2. במלבן ABCD נתון: $AB = 8.4$ ס"מ, $AC = 10$ ס"מ, $AM = AK$. א. חשב את גודל הזווית BAC. ב. חשב את אורך הקטע MK.
- תשובה: א. 32.86° . ב. 2.828 ס"מ.

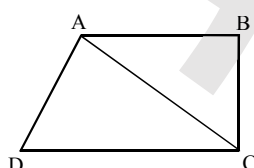
3. נתון משולש ששטחו 35 סמ"ר. אורכי שתיים מצלעותיו הם 10 ס"מ ו-8 ס"מ. חשב את אורך הצלע השלישית של המשולש. רשום את שתי האפשרויות.
- תשובה: 9.303 ס"מ או 15.54 ס"מ.

4. היקפו של משולש ABC הוא 40 ס"מ. הצלע BC גדולה ב-6 ס"מ מהצלע AB. נתון: $\angle ABC = 60^\circ$. חשב את אורכי צלעותיו של המשולש.
- תשובה: 16 ס"מ, 10 ס"מ, 14 ס"מ.



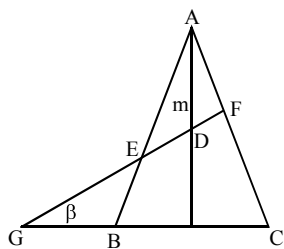
5. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) העבירו מקביל ליתר, החותך את הניצבים בנקודות D ו-E. נתון: $\angle DAE = \alpha$, $\angle ABE = \alpha$, $DE = m$. הבע באמצעות m ו- α את אורכי הקטעים AB ו-BE.

תשובה: $\frac{m \cos \alpha \sin 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$, $\frac{m \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$.



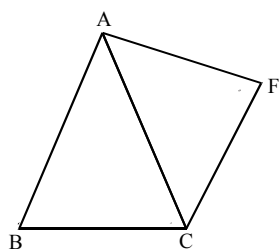
6. ABCD הוא טרפז ישר-זווית ($BC \perp DC$, $AB \parallel CD$). נתון: $AC = CD$, $\angle ACD = \alpha$. א. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC. ב. חשב את היחס הנ"ל כאשר $\alpha = 60^\circ$.

תשובה: א. $\frac{1}{\cos \alpha}$. ב. 2.



7. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) זווית הראש היא 2α . דרך הנקודה D, הנמצאת על הגובה לבסיס במרחק m מהקדקוד A העבירו ישר היוצר זווית β עם הישר BC. ישר זה חותך את שוקי המשולש בנקודות E ו-F. הבע את שטח המשולש AEF באמצעות α ו- β .

תשובה: $\frac{m^2 \sin 2\alpha \cos^2 \beta}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}$

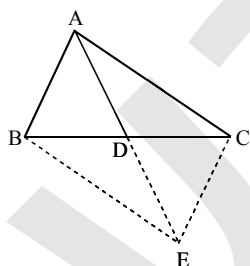


8. במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) בנו על השוק AC משולש שווה-שוקיים AFC כך ש- $AF = CF = BC = a$. נסמן: $\angle ABC = \alpha$, $\angle AFC = \beta$. א. (1) הבע את האורך של השוק AC באמצעות a ו- α . (2) הוכח כי $\cos \beta = 1 - \frac{1}{8 \cos^2 \alpha}$. ב. נתון כי משולש AFC הוא ישר-זווית. מצא את הזווית במשולש ABC.

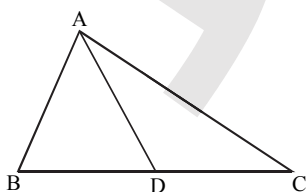
תשובה: א. (1) $\frac{a \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$. ב. 69.295° , 69.295° , 41.41° .

9. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים ($AB = AC$). AD הוא גובה לבסיס BC ו-CE הוא גובה לשוק AB. שני הגבהים נחתכים בנקודה O. נתון: $\angle ABC = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$). א. הבע את היחס $\frac{AO}{DO}$ באמצעות α . ב. הצב $\alpha = 60^\circ$ ביחס של סעיף א', והסבר את התוצאה המתקבלת. ג. הצב $\alpha = 45^\circ$ ביחס של סעיף א', והסבר את התוצאה המתקבלת.

תשובה: א. $\tan^2 \alpha - 1$. ב. $\frac{AO}{DO} = 2$. ג. $\frac{AO}{DO} = 0$, כלומר $AO = 0$. O ו-A מתלכדות.

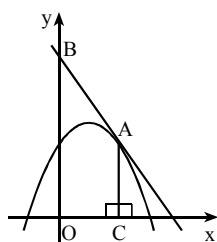


10. AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC. נתון: $AC = 12$ ס"מ, $\angle BAD = 42^\circ$, $\angle DAC = 36^\circ$. חשב את אורך התיכון AD. **הדרכה:** הארך את התיכון AD כאורכו כך שתיווצר מקבילית ABEC. **תשובה:** 8.771 ס"מ.



11. AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC. נתון: $AC = 7$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ, $AB = AD$. חשב את הזווית C ואת אורך הצלע AB. **תשובה:** 31° , 4.123 ס"מ.

חשבון דיפרנציאלי – פולינומים (5 יחידות)



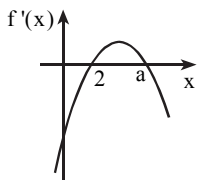
1. לגרף הפונקציה $y = -x^2 + 2x + 3$ מעבירים משיק בנקודה $A(2;3)$. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה B . מנקודה A מורידים אנך AC לציר ה- x . חשב את שטח הטרפז $ABOC$ (O - ראשית הצירים).
2. הישר $y = 2x + 4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 8x + c$. מצא את ערכו של c .
3. הנקודות A ו- B נמצאות על גרף הפונקציה $y = x^3 - 7x + 1$, כך ששיעור ה- x בנקודה A גדול ב-4 משיעור ה- x בנקודה B . ידוע כי המשיקים לפונקציה בנקודות A ו- B מקבילים זה לזה. מצא את שיעורי הנקודות A ו- B .
4. נתונה הפונקציה $f(x) = -\frac{x^2}{4} + x$.
 - א. מצאו: (1) תחום ההגדרה. (2) נקודות קיצון.
 - ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = f(x) + 1$. שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.
 - ד. קבעו נכון או לא נכון:
 - (1) הזזה אנכית אינה משנה את תחומי העלייה והירידה.
 - (2) הזזה אנכית אינה משנה את תחומי החיוביות והשליליות.
 - ה. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x) = f(x) + c$. לפונקציה $h(x)$ יש מקסימום בנקודה שבה שיעור ה- y הוא -1 . מצאו את הערך של c .
 - ו. מצאו את הערך של k , אם נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x)$ היא $(2;4)$ מקסימום.
5. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 18x^2 + 32$.
 - א. הוכיחו שהפונקציה היא **פונקציה זוגית**.
 - ב. מצאו: (1) נקודות קיצון. (2) תחומי עלייה וירידה. (3) נקודות חיתוך על הצירים.
 - ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ד. מהם תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$?
 - ה. היעזרו בסעיפים קודמים, ופתרו את אי השוויון $x^4 - 18x^2 + 32 < 0$.
 - ו. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{2}x^4 > 9x^2 - 16$.
 - ז. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) + k$. מצאו לאיזה ערך של k :
 - (1) גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .
 - (2) גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לישר שמשוואתו $y = 7$.
6. לפונקציה $f(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + mx + 10$ יש נקודת קיצון ב- $x = 1$.
 - א. מצא את m .
 - ב. מצא את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה, ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) - 13 = 0$.

7. נתונה הפונקציה $y = -x^3 + 3ax$, $a > 0$.
- א. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים (במידת הצורך, הבע תשובותיך באמצעות a).
- ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. לאילו ערכים של k חותך הישר $y = k$ את גרף הפונקציה (הבע באמצעות a).
- (1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) בשלוש נקודות.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$.
- א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.
- (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.
- ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x-1)$.
- (1) בכמה יחידות ולאיזה כיוון יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$, כדי לקבל את גרף הפונקציה $g(x)$?
- (2) מצאו (ללא חישובים) את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
- (3) שרטטו (ללא חישובים נוספים) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
- ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x) = \frac{(x+3)^4}{4} - 2(x+3)^2$.
- (1) בכמה יחידות ולאיזה כיוון יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$, כדי לקבל את גרף הפונקציה $h(x)$?
- (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.
- ה. מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בשתי נקודות שונות.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 6x$.
- א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.
- (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.
- ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. הראו שהפונקציה היא פונקציה אי זוגית.
- ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = 2 \cdot f(x)$.
- (1) כתבו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
- (2) שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.
- ה. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$.
- (1) כתבו את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.
- (2) שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של הפונקציה $h(x)$ באותה מערכת צירים.
- ו. הפונקציה $k(x)$ מקיימת $k(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x) + 3$.
- הוסיפו למערכת הצירים שבסעיף ה(2) סקיצה של הפונקציה $k(x)$.

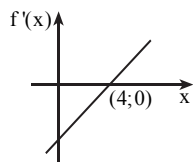
10. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2$.
- א. מצא: (1) נקודות חיתוך עם הצירים. (2) נקודות מינימום מקסימום.
- ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.
- ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = f(x) - 4$.
- ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = |f(x)| - 4$.
- ו. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ המקיימת $h(x) = |f(x) - 4|$.



24. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + bx + 1$.

בשרטוט מתואר חלק מגרף הנגזרת $f'(x)$.
היעזרו בנתונים שעל השרטוט:
א. מצאו את הפרמטרים b ו- a .

ב. נסמן: $g(x) = f(x) + k$. האם הגרף של $g'(x)$ זהה לגרף של $f'(x)$? נמקו.

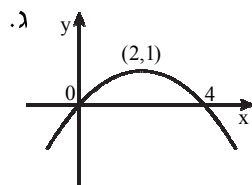
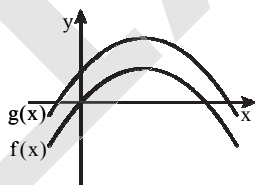


25. נתונה פונקציה $f(x)$. לפניכם הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
 $f'(x)$ היא פונקציה קווית, ויש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x) = 2$.
א. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = 1 - f(x+1)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ג. מהם תחומי השליליות של הפונקציה $h(x)$ המקיימת $h(x) = f'(x-2)$?

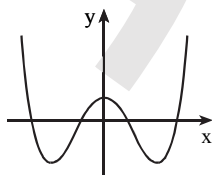
26. א. נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 8x - 24$.
(1) הוכח שהפונקציה $f(x)$ יורדת לכל ערך של x .
(2) חשב את $f(-3)$.
(3) על-פי הסעיפים (1) ו-(2), מצא עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ שלילית, ועבור אילו ערכי x היא חיובית.
ב. נתונה הפונקציה $g(x) = -\frac{x^4}{4} - x^3 - 4x^2 - 24x - 7$.
(1) מצא בעזרת סעיף א' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע אם היא מינימום או מקסימום.
(2) הסבר מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון נוספות.
ג. מצא עבור אילו ערכים של k למשוואה $g(x) = k$:
(1) יש פתרון יחיד. (2) יש שני פתרונות. (3) אין אף פתרון.

תשובות:

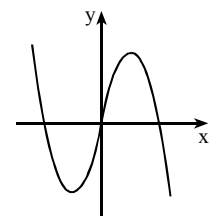
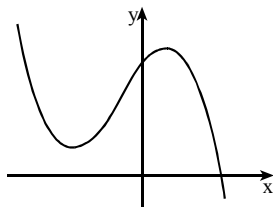
1. 10. 2. 13. 3. $B(-2; 7)$, $A(2; -5)$.
4. א. (1) כל x . (2) $(2; 1)$ מקסימום. (3) עלייה: $x < 2$, ירידה: $x > 2$. (4) $(0; 0)$, $(4; 0)$.
ב.



ד. (1) נכון. (2) לא נכון. ה. $c = -2$. ו. $k = 4$.



5. ב. (1) $(3; -49)$ מינימום, $(0; 32)$ מקסימום, $(-3; -49)$ מינימום. ג.
(2) עלייה: $x > 3$ או $-3 < x < 0$, ירידה: $0 < x < 3$ או $x < -3$.
(3) $(0; 32)$, $(4; 0)$, $(-4; 0)$, $(\sqrt{2}; 0)$, $(-\sqrt{2}; 0)$.
ד. $x > 4$ או $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ או $x < -4$.
ה. $\sqrt{2} < x < 4$ או $-4 < x < -\sqrt{2}$.
ו. $x > 4$ או $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ או $x < -4$.
ז. (1) $k = 49$ או $k = -32$. (2) $k = 56$ או $k = -25$.

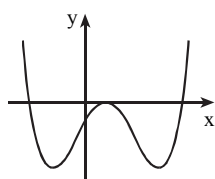
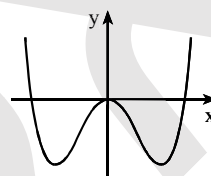


6. א. 3.
ב. $(1; 11\frac{2}{3})$ מקסימום, $(-3; 1)$ מינימום.
ג. פתרון אחד.

7. א. תחום הגדרה: כל x . נקודות קיצון: $(\sqrt{a}; 2a\sqrt{a})$ מקסימום, $(-\sqrt{a}; -2a\sqrt{a})$ מינימום.
תחומי עלייה: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$,
תחומי ירידה: $x > \sqrt{a}$ או $x < -\sqrt{a}$.
נקודות חיתוך: $(0; 0)$, $(\sqrt{3a}; 0)$, $(-\sqrt{3a}; 0)$.
ג. (1) $k > 2a\sqrt{a}$ או $k < -2a\sqrt{a}$. (2) $k = 2a\sqrt{a}$ או $k = -2a\sqrt{a}$. (3) $-2a\sqrt{a} < k < 2a\sqrt{a}$.

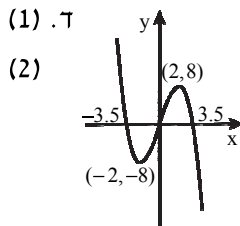
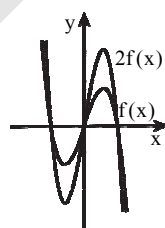
8. א. (1) כל x . (2) $(0; 0)$ מקסימום, $(2; -4)$ מינימום, $(-2; -4)$ מינימום.
(3) עלייה: $x > 2$ או $-2 < x < 0$, ירידה: $x < -2$ או $0 < x < 2$.
(4) $(0; 0)$, $(\sqrt{8}; 0)$, $(-\sqrt{8}; 0)$.

- ב. ג. (1) יחידה אחת ימינה.
(2) $(1; 0)$ מקסימום,
 $(3; -4)$ מינימום,
 $(-1; -4)$ מינימום.

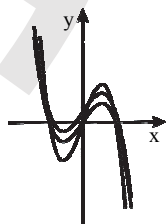


- ד. (1) 3 יחידות שמאלה.
(2) $(-3; 0)$ מקסימום, $(-1; -4)$ מינימום, $(-5; -4)$ מינימום.
ה. $y = -4$.

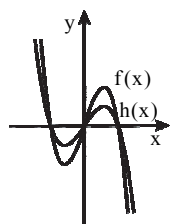
9. א. (1) כל x . (2) $(2; 8)$ מקסימום, $(-2; -8)$ מינימום.
(3) עלייה: $-2 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ או $x < -2$. (4) $(0; 0)$, $(3.464; 0)$, $(-3.464; 0)$.
ב. ד. (1) $(2; 16)$ מקסימום, $(-2; -16)$ מינימום.



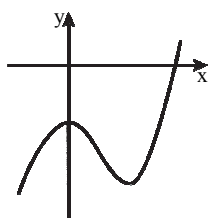
ו.



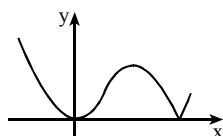
- ה. (1) $(2; 4)$ מקסימום, $(-2; -4)$ מינימום. (2)



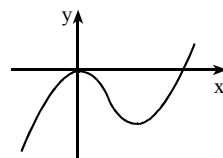
10. א. (1) (0;0) , (6;0) . ב. (2) (0;0) מקסימום, $(4; -5\frac{1}{3})$ מינימום.



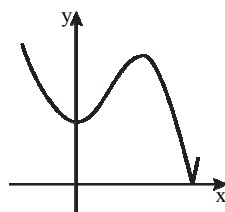
ד.



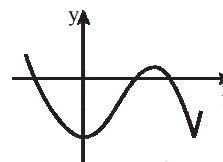
ג.



ב.



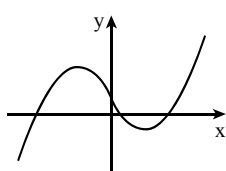
ו.



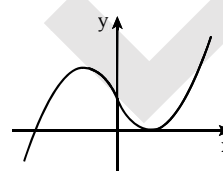
ה.

11. א. (1; -4) מינימום, (-1; 4) מקסימום. ב. (4; -2) מינימום, (2; 6) מקסימום. ג. (1; -21) מינימום, (-1; 11) מקסימום. ד. $a = -2$.

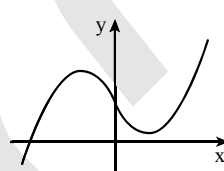
12. א. $(0; a^2)$. ב. (1) $(0.25a; a^2 - \frac{a^3}{3})$ מינימום, $(-0.25a; a^2 + \frac{a^3}{3})$ מקסימום. (2) ברביע השני.



(3)



(2)



ג. (1)

ד. (1) $0 < a < 1.5$. (2) $a = 1.5$. (3) $a > 1.5$.

13. $y = 15x - 6$, $y = 15x - 14$.

14. א. (3; -729) מינימום.

ב. עלייה: $x > 3$,

ירידה: $x < 3$.

ג. א. (0; 0) , (6; 0) .

15. א. -64 . ב. $y = -64x + 384$.

16. א. כל x .

ב. (0; -64) , (1; 0) , (4; 0) .

ג. (2; 16) מקסימום, (4; 0) מינימום.

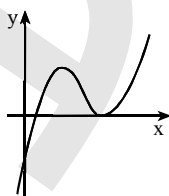
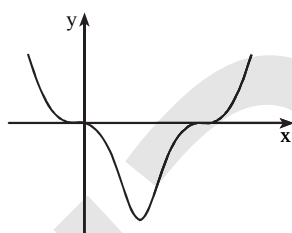
ד. עלייה: $x > 4$ או $x < 2$, ירידה: $2 < x < 4$.

ו. $0 \leq k \leq 16$.

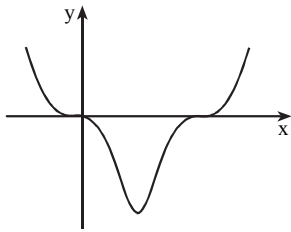
ז. (2; -32) מינימום, (4; 0) מקסימום.

ח. עלייה: $x > 6$ או $x < 4$,

ירידה: $4 < x < 6$.



ה.

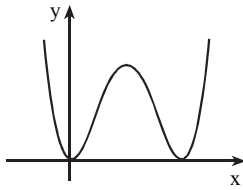


ג.

17. א. $(0;0)$ אינה קיצון, $(6;0)$ אינה קיצון,

מינימום. $(3;-8)$

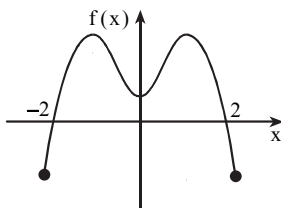
ב. עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 3$.



ה.

ד. $(0;0)$ מינימום, $(3;16)$ מקסימום,

מינימום. $(6;0)$



ב. (1)

18. א. כן, יואב צודק. פונקציה אי זוגית,

המוגדרת עבור $x = 0$, עוברת תמיד דרך

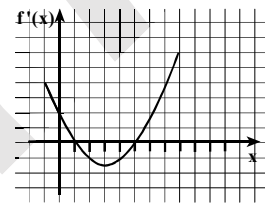
ראשית הצירים, והגרף הנתון של $f(x)$

מוגדר עבור $x = 0$, אך לא עובר בראשית.

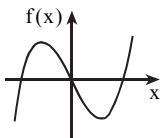
19. ב. כן.

20. א. חיובי. ב. גרף 1.

ב. $y = 2x + 2$.



א. 21.

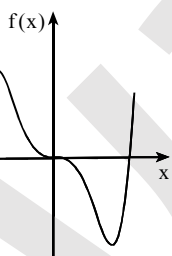


ג.

22. א. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$,

ירידה: $-2 < x < 2$.

ב. $x = -2$ מקסימום, $x = 2$ מינימום.



ב.

23. א. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$.

ירידה: $-2 < x < 2$.

24. א. $a = 5$, $b = 10$. ב. כן.

25. א. $(4;2)$ מינימום. ב. $(3;-1)$ מקסימום. ג. $x < 6$.

26. א. (2) $f(-3) = 0$. (3) חיובית: $x < -3$, שלילית: $x > -3$.

ב. (1) $(-3;35.75)$ מקסימום.

ג. (1) $k = 35.75$. (2) $k < 35.75$. (3) $k > 35.75$.

פונקציות רציונליות

1. הישר $x = -1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה $y = \frac{ax+16}{x^2-3x-b}$. בנקודה $x = 2$ לפונקציה יש נקודת קיצון.
א. מצא את a ואת b .
ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. דרך כל אחת משתי נקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים משיק וישר המאונך למשיק. ארבעת הישרים הנ"ל יוצרים מרובע. חשב את שטח המרובע.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{ax^2+bx+1}{x^2-6x+8}$ בנקודה $(5; 5\frac{1}{3})$ הוא $-\frac{40}{9}$.
א. מצא את a ואת b .
ב. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עליה וירידה.
ג. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. (1) מצא את תחומי החיוביות של הפונקציה.
(2) מצא לאילו ערכי x שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה הם חיוביים.
3. הישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x) = a + \frac{4x-15}{(x-4)^2}$.
א. מצא את הערך של a .
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ו. הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = 2f(x) + c$.
נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ היא $(3.5; 3)$. מצא את ערך הפרמטר c .
4. נתונה פונקציה $f(x) = \frac{2}{ax^2-x}$.
אחת האסימפטוטות של הפונקציה היא ישר המקביל לציר ה- y (ולא מתלכד איתו).
ישר זה חותך את הישר $y = x+3$ בנקודה ששיעור ה- y שלה הוא 4.
א. מצא את הערך של הפרמטר a .
ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מצא לאילו ערכים של t יש למשוואה $f(x) = t$:
(1) שני פתרונות. (2) אף פתרון. (3) פתרון אחד.
5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{32x}{(x^2+3)^2}$.
א. הוכח שהפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .
ב. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה שבהן $f'(x) = 0$, וקבע אם הן מסוג מינימום או מקסימום.
ג. הוכח שפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

6. נתונות משוואות של שלוש פונקציות :

$$h(x) = \frac{x(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}, \quad g(x) = \frac{x^2}{(x-3)(x+3)}, \quad f(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}$$

קבעו לאיזו פונקציה יש את התכונה הבאה :
יש לה שני ערכי x שבהם היא לא מוגדרת, ואסימפטוטה אנכית אחת.
נמקו את בחירתכם, והסבירו מדוע הפונקציות האחרות אינן מתאימות.

חקור את הפונקציות הבאות ומצא : א. תחום הגדרה, ב. נקודות קיצון, ג. תחומי עלייה וירידה, ד. נקודות חיתוך עם הצירים, ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים, ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = \frac{x^2 - 7x + 10}{3x^2 - 15x} \quad .8 \quad y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1} \quad .7$$

9. נתונה הפונקציה $y = \frac{x}{x^2 + 2x + b^2}$ ($b > 1$).

א. הבע באמצעות b את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ב. מצא את b אם ערך הפונקציה בנקודת המקסימום שלה הוא $\frac{1}{8}$.

10. נתונה הפונקציה $y = \frac{(x-a)^2}{x^2 + 5}$ ($a > 0$).

א. הבע באמצעות a : (1) תחום הגדרה. (2) נקודות חיתוך עם הצירים.
(3) אסימפטוטות מקבילות לצירים. (4) נקודות קיצון. (5) תחומי עלייה וירידה.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

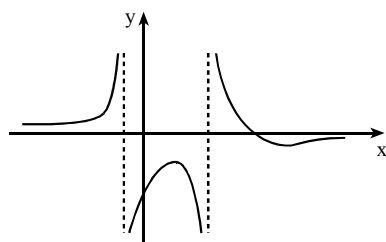
11. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{3-x}$.

א. מצא : (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. מצא עבור פונקציית הנגזרת $f'(x)$:
(1) תחום הגדרה. (2) נקודות חיתוך עם ציר ה- x .
(3) תחומי חיוביות ושלייליות. (4) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
(5) שרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$. הנח שלגרף הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

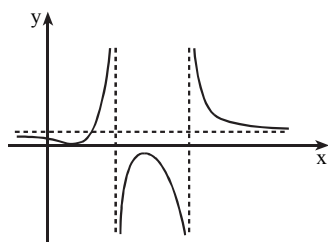
12. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 8x}{x^2 + 8}$.

א. מצא : (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה,
(4) נקודות חיתוך עם הצירים, (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של פונקציה אחרת $g(x)$,
כלומר $g'(x) = f(x)$. בהנחה שתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$
זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$:
(1) מצא את שיעורי ה- x של הנקודות שבהן לפונקציה $g(x)$
יש נקודות קיצון וקבע את סוג הקיצון.
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
(3) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.

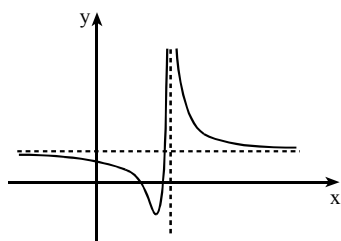
תשובות:



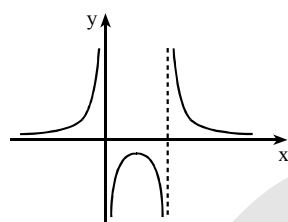
1. א. $a = -2, b = 4$. ב. תחום הגדרה: $x \neq -1, x \neq 4$.
נקודות חיתוך: $(0; -4), (8; 0)$.
אסימפטוטות: $x = -1, x = 4, y = 0$.
נקודות קיצון: $(2; -2)$ מקסימום, $(14; -0.08)$ מינימום.
עלייה: $x > 14$ או $-1 < x < 2$ או $x < -1$.
ירידה: $4 < x < 14$ או $2 < x < 4$. ד. 23.04.



2. א. $a = 1, b = -2$.
ב. $x \neq 4, x \neq 2$.
(2) $(1; 0)$ מינימום, $(2.5; -3)$ מקסימום.
(3) עלייה: $1 < x < 2$ או $2 < x < 2.5$.
ירידה: $x > 4$ או $2.5 < x < 4$ או $x < 1$.
(4) $(0; \frac{1}{8}), (1; 0)$. (5) $x = 2, x = 4, y = 1$.
ד. (1) $x > 4$ או $1 < x < 2$ או $x < 1$.
(2) $1 < x < 2$ או $2 < x < 2.5$.



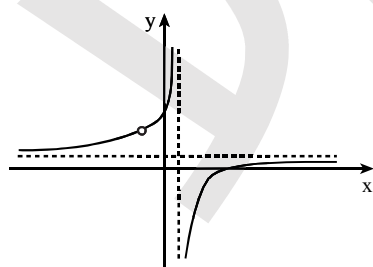
3. א. 2. ב. $x \neq 4$.
ג. $(3.5; -2)$ מינימום.
ד. $(0; \frac{1}{16}), (2.29; 0), (3.71; 0)$.
ו. 7.



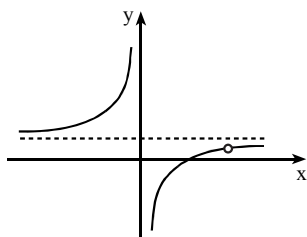
4. א. 1. ב. תחום הגדרה: $x \neq 1, x \neq 0$.
נקודות קיצון: $(\frac{1}{2}; -8)$ מקסימום.
עלייה: $0 < x < \frac{1}{2}$ או $x < 0$; ירידה: $x > 1$.
או $\frac{1}{2} < x < 1$. נקודות חיתוך: אין.
אסימפטוטות: $x = 0, x = 1, y = 0$.
ד. (1) $t > 0$ או $t < -8$. (2) $-8 < t \leq 0$. (3) $t = -8$.

5. ב. (1; 2) מקסימום, $(-1; -2)$ מינימום.

6. f(x). 2. (1) לא נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה.



7. א. $x \neq -1, x \neq 1$. ב. אין.
ג. עלייה: $x > 1$ או $-1 < x < 1$ או $x < -1$.
ירידה: אין.
ד. $(0; 5), (5; 0)$.
ה. $x = 1, y = 1$.



8. א. $x \neq 5$, $x \neq 0$.

ב. אין.

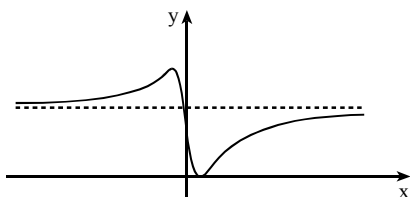
ג. עלייה: $x > 5$ או $0 < x < 5$ או $x < 0$;

ירידה: אין.

ד. $(2; 0)$.

ה. $y = \frac{1}{3}$, $x = 0$.

9. א. $(b; \frac{1}{2b+2})$ מקסימום, $(-b; \frac{-1}{2b-2})$ מינימום. ב. 3.



ב.

10. א. (1) כל x .

(2) $(0; \frac{a^2}{5})$, $(a; 0)$.

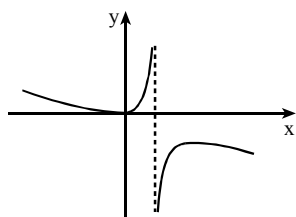
(3) מינימום, $(a; 0)$.

מקסימום $(-\frac{5}{a}, \frac{a^2+5}{5})$.

(4) עלייה: $x > a$ או $x < -\frac{5}{a}$;

ירידה: $-\frac{5}{a} < x < a$.

(5) $y = 1$.



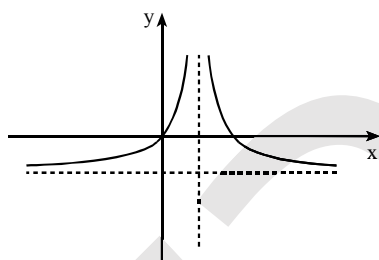
11. א. (1) $x \neq 3$.

(2) $(0; 0)$ מינימום, $(6; -12)$ מקסימום.

(3) עלייה: $3 < x < 6$ או $0 < x < 3$;

ירידה: $x > 6$ או $x < 0$.

(4) $(0; 0)$. (5) $x = 3$.



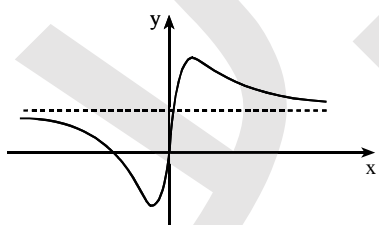
ג. (1) $x \neq 3$.

(2) $(0; 0)$, $(6; 0)$.

(3) חיוביות: $0 < x < 3$ או $3 < x < 6$;

שליליות: $x > 6$ או $x < 0$.

(4) $y = -1$, $x = 3$.



12. א. (1) כל x . (2) $(4; 2)$ מקסימום, $(-2; -1)$ מינימום.

(3) עלייה: $-2 < x < 4$;

ירידה: $x > 4$ או $x < -2$.

(4) $(0; 0)$, $(-8; 0)$. (5) $y = 1$.

ג. (1) $x = 0$ מינימום, $x = -8$ מקסימום.

(2) עלייה: $x > 0$ או $x < -8$;

ירידה: $-8 < x < 0$.

פונקציות שורש

פתרו את המשוואות הבאות:

$$\sqrt{6-x} - \frac{x}{\sqrt{6-x}} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{x}{\sqrt{8-x^2}} - 1 = 0 \quad (7)$$

$$x - \sqrt{2-x} = 0 \quad (6)$$

$$\sqrt{x} - \frac{3-x}{2\sqrt{x}} = 0 \quad (5)$$

תשובות:

$$.2 \quad (7) \quad .1 \quad (6) \quad .1 \quad (5) \quad .4 \quad (3) \quad .\frac{1}{4} \quad (2)$$

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \sqrt{x-2} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{x} \quad (1)$$

$$y = x\sqrt{-12-4x} \quad (6)$$

$$y = \sqrt{x+5} \quad (4)$$

$$y = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x^2-4} \quad (9)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (7)$$

$$y = \sqrt{2x+4} + \sqrt{9-3x} \quad (12)$$

$$y = \sqrt{x} - \sqrt{5-x} \quad (11)$$

$$y = \sqrt{-x^2+4x+5} \quad (21)$$

$$y = \sqrt{x^2-4x+3} \quad (20)$$

$$y = \sqrt{x^2-2x} \quad (19)$$

$$y = \sqrt{-2x^2+7x+4} - \frac{1}{x} \quad (24)$$

$$y = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2-9} \quad (23)$$

$$y = \sqrt{x^2+1} \quad (22)$$

תשובות (תחום ההגדרה – פונקציות עם שורשים):

$$\begin{aligned} (1) \quad x \geq 0 \quad (2) \quad x \geq 0 \quad (3) \quad x \geq 2 \quad (4) \quad x \geq -5 \quad (5) \quad x \leq 4 \quad (6) \quad x \leq -3 \quad (8) \quad x \leq 1, \\ (9) \quad x \neq 0, \quad x \geq -3 \quad (10) \quad x \geq 4 \quad (11) \quad 0 \leq x \leq 5 \quad (12) \quad -2 \leq x \leq 3 \quad (13) \quad x \geq 0 \quad (14) \quad x \leq 2 \quad (15) \quad x \leq \sqrt[3]{4} \quad (16) \quad -2 \leq x \leq 2 \quad (17) \quad 0 \leq x \leq 4 \quad (19) \quad x \geq 2, \\ (20) \quad x \leq 0 \quad (21) \quad x \leq 1 \quad (22) \quad -1 \leq x \leq 5 \quad (23) \quad x \text{ כל} \quad (24) \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 4, \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

גזרו את הפונקציות הבאות:

$$y = x^3 + 4\sqrt{x} \quad (13)$$

$$y = x^2 - \sqrt{x} \quad (12)$$

$$y = -5x + 2\sqrt{x} \quad (11)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (16)$$

$$y = \frac{1}{2x^2} - 6\sqrt{x} \quad (15)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{x} \quad (14)$$

$$y = 2x^2\sqrt{x} \quad (19)$$

$$y = 1 + x\sqrt{x} \quad (18)$$

$$y = 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (17)$$

$$y = \sqrt{4-6x} \quad (28)$$

$$y = \sqrt{3x-2} \quad (27)$$

$$y = \sqrt{x-1} \quad (26)$$

$$y = \sqrt{x^3-5} \quad (31)$$

$$y = \sqrt{2x-x^2} \quad (30)$$

$$y = \sqrt{x^2-7x} \quad (29)$$

$$y = x\sqrt{1-x} \quad (34)$$

$$y = \sqrt{x^4-2x} \quad (33)$$

$$y = \sqrt{2x-x^3} \quad (32)$$

$$y = (x+2)\sqrt{4-x^2} \quad (37)$$

$$y = \sqrt{x^2+(1-x)^2} \quad (36)$$

$$y = x\sqrt{x^2+1} \quad (35)$$

תשובות:

$$\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} \quad (14) \quad 3x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (13) \quad -5 + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (11) \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (10) \quad \frac{3}{2\sqrt{x}} \quad (9) \quad \frac{4}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad 2 \quad (7)$$

$$4x\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} \quad (19) \quad \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \quad (18) \quad \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (17) \quad -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad (16) \quad -\frac{1}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}} \quad (15)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} \quad (27) \quad \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \quad (26) \quad 1 \quad (25) \quad 4 \quad (24) \quad \frac{1}{4} \quad (23) \quad -\frac{1}{2} \quad (22) \quad 4 \quad (20)$$

$$\frac{2x^3-1}{\sqrt{x^4-2x}} \quad (33) \quad \frac{2-3x^2}{2\sqrt{2x-x^3}} \quad (32) \quad \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \quad (30) \quad \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x}} \quad (29) \quad \frac{-3}{\sqrt{4-6x}} \quad (28)$$

$$\sqrt{4-x^2} - \frac{x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}} \quad (37) \quad \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+(1-x)^2}} \quad (36) \quad \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \quad (35) \quad \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} \quad (34)$$