

עבודת קיץ במתמטיקה לקראת תשפ"ד לעולים ליא' 5 יח"ל

תלמידים יקרים!

כהכנה לקראת לימודיכם במתמטיקה בכיתה י"א וכדי להבטיח את הצלחתכם בבחינות הבגרות בשנה זו, יש לחזור בחופשת הקיץ על החומר הנלמד בכיתה י' בעזרת העבודה המצורפת.

עבודה זו הינה חובה על כל תלמיד!

✓ לעבודה יינתן משקל בציון מחצית א' במתמטיקה בשנת הלימודים הבאה.

✓ את העבודה יש להגיש למורה למתמטיקה בקלסר חצי שקוף בשבוע הראשון של שנת הלימודים הבאה.

✓ הקפידו על כתיבת עבודה מסודרת, על שרטוטי גאומטריה בתרגילים המתאימים ועל כתיבה מתמטית נכונה.

העבודה מחולקת ל 3 נושאים:

1. תרגול חדו"א
2. תרגול גיאומטריה
3. תרגול טריגונומטריה

חופשה נעימה ובהצלחה!

עבודת חופש לקראת תשפ"ד 5 יח"ל

חדו"א

- (1) נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2a - x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x \neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.
- א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
- (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.
- (2) הראו שהפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי-זוגית.
- (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.
- (4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$, אם יש כאלה.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה גם הפונקצייה $g(x) = |f(x)| - b$, b הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ היא: $(3, -8)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו- b .

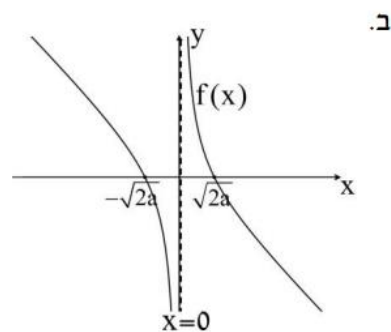
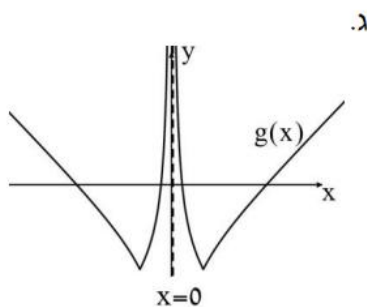


תשובה: א. (1) $x = 0$.

(2) הוכחה.

(3) $(-\sqrt{2a}, 0)$, $(\sqrt{2a}, 0)$.

(4) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x > 0$ או $x < 0$.



ד. $b = 8$, $a = 4.5$.

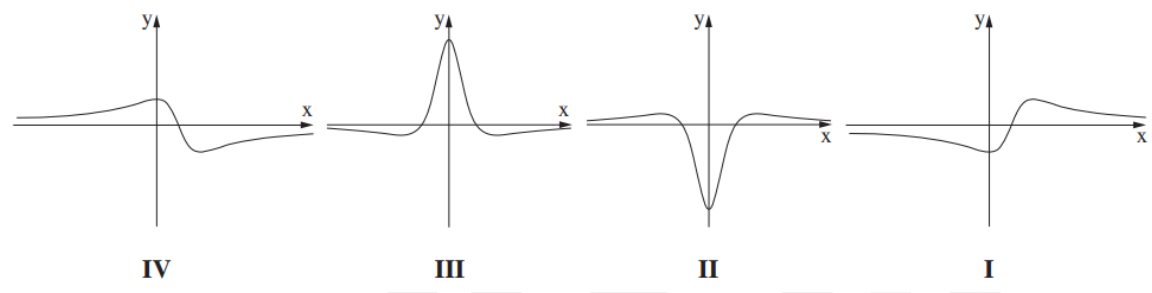
(2)

נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} + a$. הוא פרמטר.

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (אם צריך, הביעו באמצעות a).
- נתון כי נקודת המינימום של הפונקצייה $f(x)$ נמצאת על ציר ה- x .
- ג. מצאו את a .
- הציבו בפונקצייה $f(x)$ את a שמצאתם בסעיף ג, וענו על סעיפים ד-ו.
- ד. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = 3 \cdot f(x)$.

- ו. (1) אחד מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



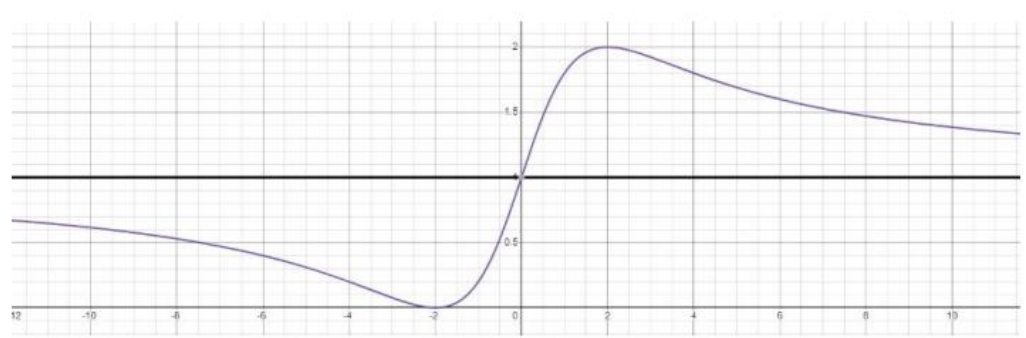
תשובה: א. כל x .

ב. $(-2, -1+a) \min, (2, 1+a) \max$.

ג. $a = 1$.

ד. $y = 1$.

ה.



ו. (1) III.

3) לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקצייה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.

ענו על סעיפים ב-ד עבור הפונקצייה שקבעתם בסעיף א.

ב. (1) מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה של האסימפטוטה האנכית של הפונקצייה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.

נתון כי לפונקצייה זו אין נקודות קיצון.

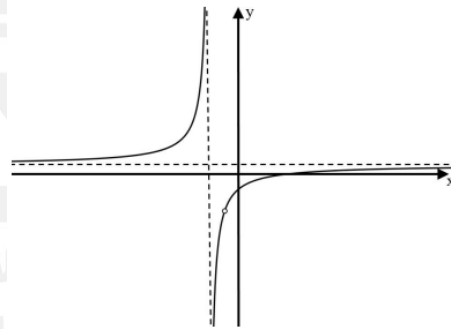
ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה.

תשובה : א. $g(x)$.

ב. (1) $x = -2, y = 1$.

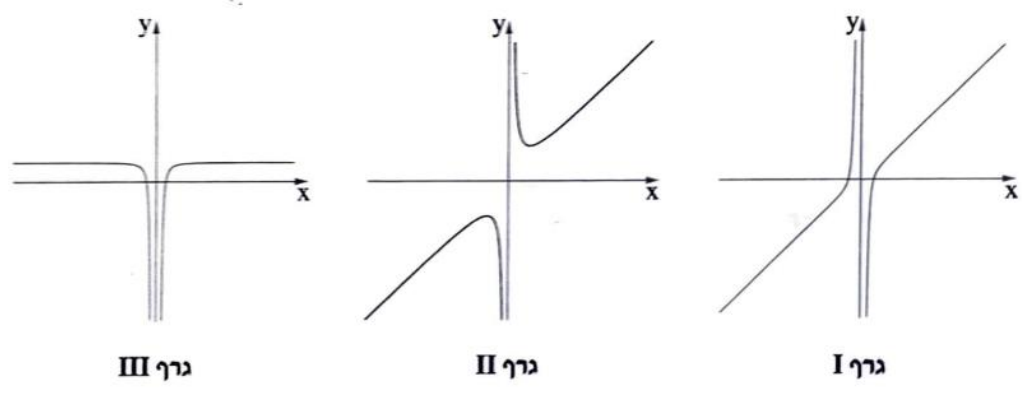
(2) $(0, -\frac{1}{2}), (1, 0)$.

ג.



(4) נתונה הפונקצייה $f(x) = 3x + \frac{3}{x}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את התשובה.
 (3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.
- נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו- $g(x)$.
 $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$, ו- $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.
 הפונקציות $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.
- ב. כל אחד מן הגרפים III-I שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$.
 לכל אחת מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

בית חינוך תיכון ע"ש חיים

תשובה: א. (1) $x \neq 0$.

(2) הפונקציה אי זוגית.

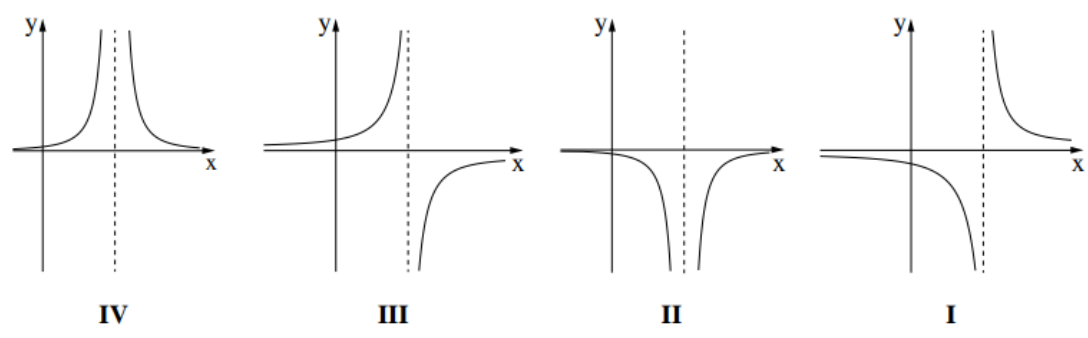
(3) תחומי עלייה: $1 < x$ או $x < -1$, תחומי ירידה: $0 < x < 1$ או $-1 < x < 0$.

ב. $f(x)$ - גרף II, $f'(x)$ - גרף III, $g(x)$ - גרף I.

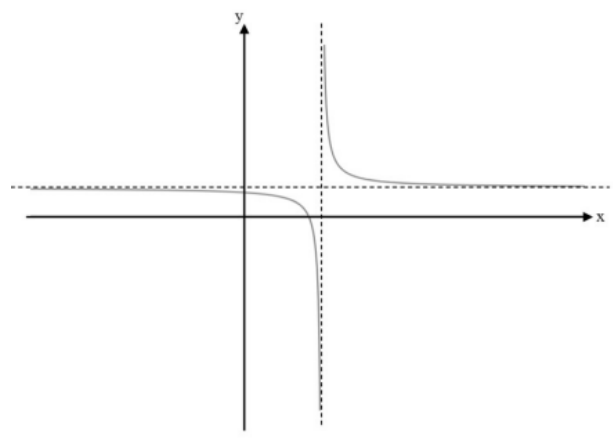
ג. $(-1, 0)$, $(1, 0)$.

5) נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{2x - b}{x - 8} + 1$. הוא פרמטר. b

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. מצאו את b .
- ג. מצאו את הערך של b שמצאתם בסעיף ב בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג-ז.
- ד. מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
- ה. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .
- ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- ז. (1) אחד מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.



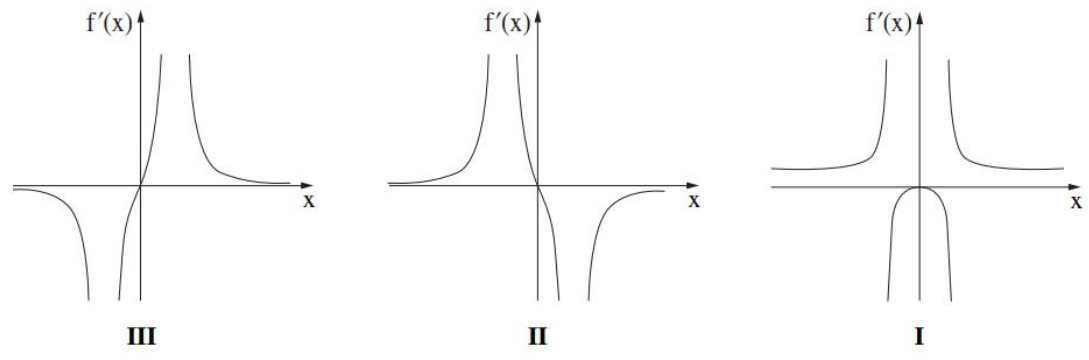
- א. $x \neq 8$
- ב. $b = 12$
- ג. $y = 3, x = 8$
- ד. $(6\frac{2}{3}, 0)$
- ה. עלייה: אף x .
- ירידה: $x > 8$ או $x < 8$.



ז. (1) גרף II.

6 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4}{4x^2 - 1} + b$, b הוא פרמטר.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- ב. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה (אם צריך, הבע באמצעות b).
 (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- ג. נתון כי הישר $y = -2$ משיק לפונקציה $f(x)$ בנקודת הקיצון שלה.
 מצא את b .
- ד. הצב את b שמצאת בסעיף ג בפונקציה $f(x)$ וענה על הסעיפים ד-ו.
 (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
 (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$.
 אחד מן הגרפים III-I שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבע איזה מהם, ונמק את קביעתך.



בית חינוך תיכון ע"ש חיים

תשובה: א. $x \neq -\frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{2}$.

ב. (1) נקודת מקסימום. $(0, -4 + b)$.

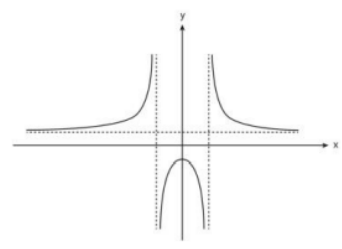
(2) תחומי עלייה: $-\frac{1}{2} < x < 0$ או $x < -\frac{1}{2}$.

תחומי ירידה: $0 < x < \frac{1}{2}$ או $x > \frac{1}{2}$.

ג. $b = 2$.

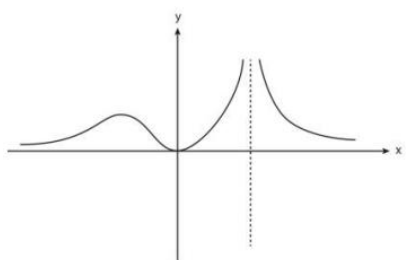
ד. (1) $y = 2, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$. (2)

ה. גרף II.

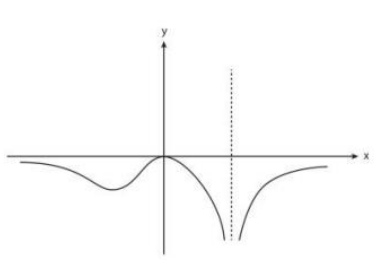


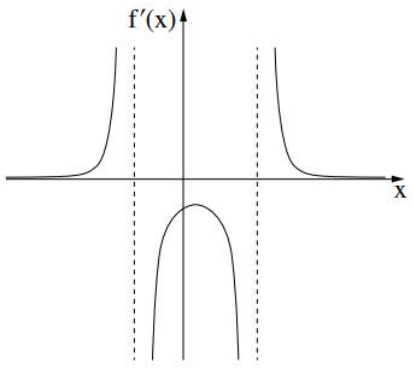
(7) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{(x^3 - m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

- א. הבע את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.
 (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
 ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = (-1)$.
 ב. מצא את הערך של m .
 הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת, וענה על הסעיפים ג-ה.
 ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 ה. נתונה הפונקציה $g(x) = k \cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.
 (1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.



- תשובה: א. (1) $x \neq \sqrt[3]{m}$.
 ב. $m = 2$.
 ג. $\max(-1, \frac{1}{9})$, $\min(0, 0)$.
 ד.





8) נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x < b$, $b < x < c$, $c < x$ וגזירה בכל תחום הגדרתה.

בסרטוט שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד
ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים: $x = c$, $x = b$, $y = 0$.
שיעור ה- x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a .
 b, a, c הם פרמטרים.

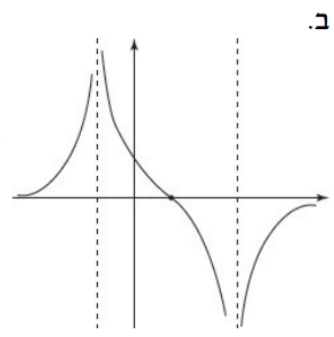
א. הבע את תשובותיך באמצעות a, b, c , אם יש צורך.
1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a, 0)$.
ב. סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון גם כי $f(x) = \frac{18 - 36x}{(x^2 - x - 6)^2}$

ג. מצא את b, a, c .
ד. 1) הראה כי בתחום $b < x < c$ מתקיים: $f'(x) \cdot (f(x))^2 \leq 0$.

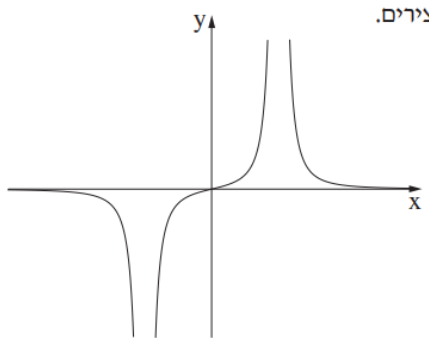
תשובה: א. (1) עליה: $x < b$ או $x > c$
ירידה: $b < x < c$



ב.
ג. $a = \frac{1}{2}, b = -2, c = 3$
ד. (1) הוכחה.

9 נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{x}{(x^2-2)^2}$, $g(x) = \frac{x}{(x^2-2)^3}$

- א. ענה על תת-סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
- (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - (2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
 - (3) הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.
 - (4) הוכח כי הפונקציה אי-זוגית.



- ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $g(x)$. קבע איזו מן הפונקציות הגרף מתאר. נמק את קביעתך.
- (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה פונקציה $h(x)$ שמקיימת: $h'(x) = f(x)$.
 $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.
 ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

נתונה הפונקציה $k(x) = f(x) + b$. $b \neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק את תשובתך.



תשובה: א. (1) $f(x) : x \neq \pm\sqrt{2}$

$g(x) : x \neq \pm\sqrt{2}$

(2) $f(x) : y = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$

$g(x) : y = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$

(3) $f(x)$: הוכחה

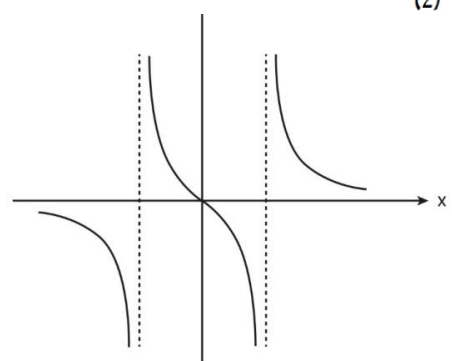
$g(x)$: הוכחה

(4) $f(x)$: הוכחה

$g(x)$: הוכחה

ב. (1) $f(x)$

(2)



ג. עליה: $\sqrt{2} < x$ או $0 < x < \sqrt{2}$, ירידה: $-\sqrt{2} < x < 0$ או $x < -\sqrt{2}$

ה. לא זוגית ולא אי זוגית

10 נתונה הפונקציה $f(x) = 6x(x^3 - 1)^3$, המוגדרת לכל x .

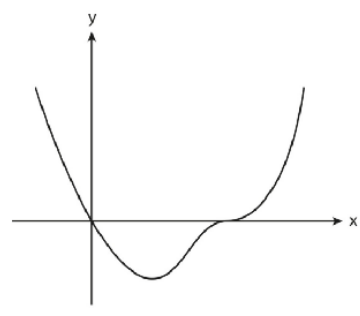
ענה על הסעיפים א-ג. אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

- א. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?
- (2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- (4) בעבור אילו ערכים של k הישר $y = k$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$?

ב. נתונה המשוואה $6x(x^3 - 1)^3 = m$. הוא פרמטר.

הסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$, וקבע בעבור אילו ערכי m למשוואה הנתונה יש בדיוק שני פתרונות חיוביים שונים, ובעבור אילו ערכי m יש לה פתרון אחד שלילי ופתרון אחד חיובי. נמק את תשובותיך.

- תשובה: א. (1) $(0,0)$, $(1,0)$
- (2) מינימום: $(0.464, -2.03)$
- (3)



ב. שתי פתרונות חיוביים: $-2.03 < m < 0$, פתרון אחד שלילי ואחד חיובי: $m > 0$

(11)

נתונה הפונקציה $f(x) = (x + 3)^4(2 - x)$ המוגדרת לכל x .

- א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- (2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
- (3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x-3)}$.

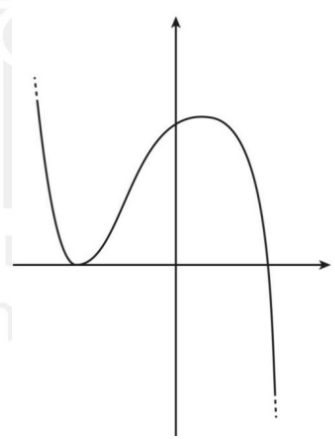
- ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
- (2) האם הפונקציה $g(x)$ חותכת את הצירים, ואם כן, באילו נקודות? נמק את תשובתך.
- (3) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?
- (4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) הראה כי $f(x) \geq 48$ לכל $-1 \leq x \leq 1$.

סתשובה: א. (1) $(-3, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 162)$

(2) $(-3, 0) \min$, $(1, 256) \max$

(3)



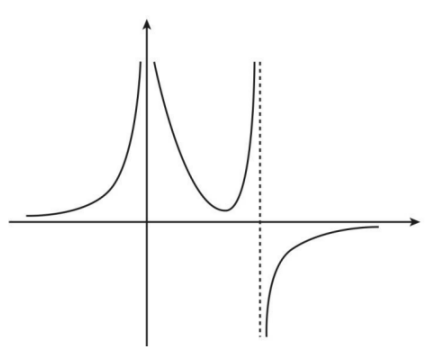
(3) תחומי עלייה: $5 < x$, $4 < x < 5$, $x < 0$

תחומי ירידה: $0 < x < 4$

(4)

ב. (1) $x \neq 0$, $x \neq 5$

(2) לא חותכת.



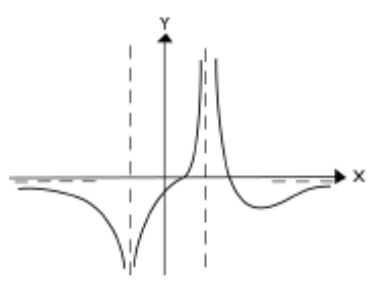
ג. (1) הוכחה.

שתיים מהאסימפטוטות של הפונקציה: $f(x) = a + \frac{2x^2 - x - 62}{b - x^2}$ נחתכות בנקודה (6,0).

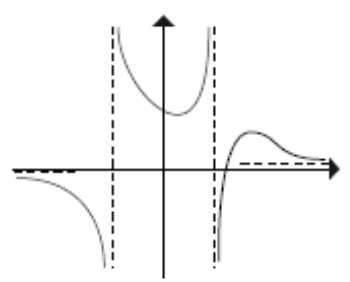
- א. מצא את ערכם של הפרמטרים a ו-b.
- ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
 1. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 2. נקודות החיתוך עם הצירים.
 3. נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.
 4. תחומי העליה והירידה.
 5. האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ג. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. שרטט את גרף הנגזרת $f'(x)$.
- ה. מצא באילו תחומים מתקיים: $f(x) \cdot f'(x) < 0$.
- ו. מצא עבור אילו ערכי k, הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות.
 - ז. מבלי לפתור ישירות את המשוואה, מצא כמה פתרונות יש:
 1. למשוואה: $f(x) = -2$.
 2. למשוואה: $f^2(x) = 1$.
 - ח. מצא עבור אילו ערכי p, למשוואה: $f(x) = p$ יש פתרון אחד.
 - ט. מגדירים פונקציה חדשה: $j(x) = 8 \cdot f(x)$. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודת המינימום של גרף הפונקציה $j(x)$ ודרך נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה-x.
 - י. מגדירים פונקציה חדשה: $g(x) = |f(x)|$.
 1. מבלי לבצע חקירה, שרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.
 2. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה ואת סוגן.
 3. מצא בכמה נקודות הנגזרת $g'(x)$ מתאפסת.
 - יא. מגדירים פונקציה: $p(x) = f(x) + n$. מצא עבור אילו ערכי n, גרף $p(x)$ משיק לציר ה-x.
 - יב. מגדירים פונקציה חדשה: $h(x) = -f(x)$.
 1. מבלי לבצע חקירה נוספת, שרטט את גרף הפונקציה $h(x)$.
 2. חשב את שטח המלבן הכלוא בין הישר המשיק לגרף הפונקציה $h(x)$ בנקודת המקסימום שלה, לבין שלוש האסימפטוטות של גרף הפונקציה.
 - ג. מצא עבור אילו ערכי m, הישר $x = m$ אינו חותך את גרף הפונקציה המקורית $f(x)$.

פתרונות:

- (א) $b = 36, a = 2$
 (ב) 1. $x \neq \pm 6$ 2. $(0, 0.27), (10, 0)$ 3. $\min(2, 0.25), \max(18, 0.027)$
 4. עולה: $6 < x < 18$ או $2 < x < 6$; יורדת: $x > 18$ או $-6 < x < -6$ או $x < -6$
 5. $x = -6, x = 6, y = 0$



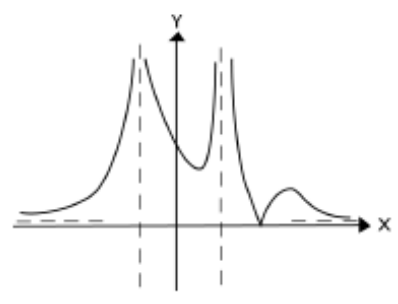
(ד)



(ג)

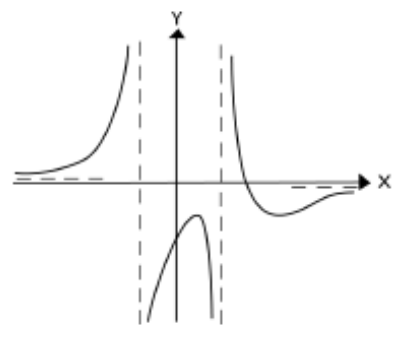
- (ה) $-6 < x < 2$ או $6 < x < 10$ או $18 < x$
 (ו) $0.25 < k$ או $0 < k < 0.027$ או $k < 0$
 (ז) 1. שניים. 2. ארבעה.
 (ח) $p = 0, 0.027, 0.25$
 (ט) $y = -0.25x + 2.5$

1. (י) 2. $\text{Min}(2, 0.25), \text{Min}(10, 0), \text{Max}(18, 0.02)$ 3. שתיים.



(י)

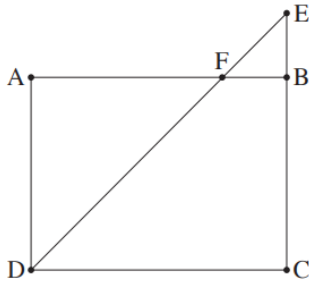
- (יא) $n = -0.027, -0.25$
 1. (יב) 2. 3 יחידה.



- (יג) $m = -6, 6$

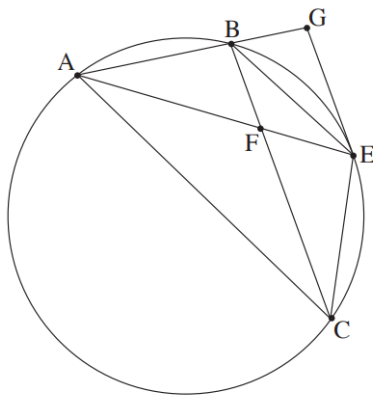
עבודת חופש לקראת תשפ"ד 5 יח"ל

גיאומטריה



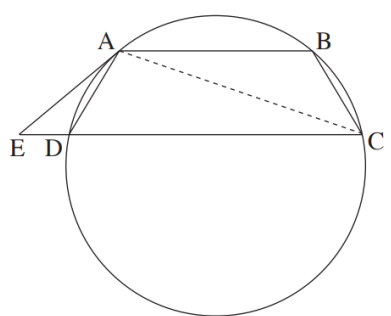
- (1) המרובע ABCD הוא מלבן.
 הנקודה E נמצאת על המשך הצלע CB, כמתואר בסרטוט שלפניכם.
 הקטע DE חותך את הצלע AB בנקודה F.
 א. הוכיחו: $\triangle AFD \sim \triangle BFE$.
 נתון כי שטח המשולש AFD גדול פי 9 משטח המשולש BFE.
 ב. מצאו את היחס $\frac{AF}{FB}$.
 נתון: $EB = 8$,
 שטח המלבן ABCD הוא 768.
 ג. (1) מצאו את אורך הצלע CB.
 (2) מצאו את אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש DCE.

תשובה: א. הוכחה. ב. $\frac{AF}{FB} = \frac{3}{1}$. ג. (1) $CB = 24$. (2) $16\sqrt{2}$.



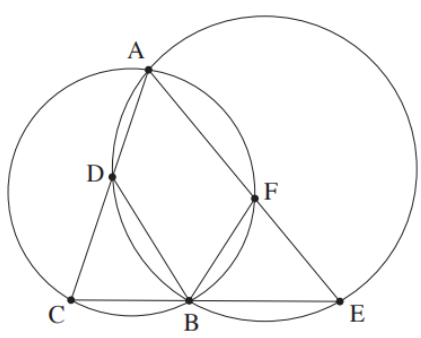
- (2) הנקודות A, B, C ו- E נמצאות על מעגל.
 נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם.
 בנקודה E מעבירים משיק למעגל.
 המשיק חותך את המשך המיתר AB בנקודה G.
 המיתרים AC ו- BE נחתכים בנקודה F.
 א. הוכיחו: $\triangle ACE \sim \triangle AEG$.
 נתון: $AG = 18$, $AE = 9\sqrt{6}$.
 ב. חשבו את אורך המיתר AC.
 ג. הוכיחו: $BC \parallel GE$.
 נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE.
 ד. חשבו את אורך המיתר AB.
 ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC? נמקו את תשובתכם.

תשובה: א. הוכחה. ב. $AC = 27$. ג. הוכחה. ד. $AB = 12$. ה. $\frac{4}{9}$.



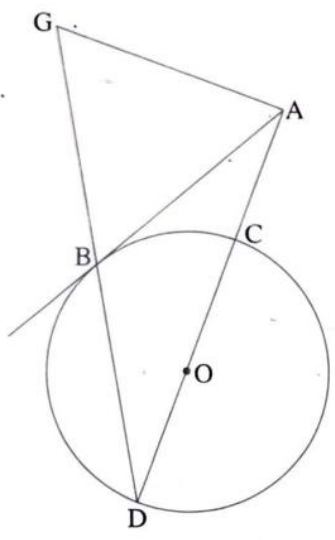
- (3) המרובע ABCD הוא טרפז החסום במעגל. $AB \parallel DC$.
 המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה E (ראו סרטוט).
 א. הוכיחו: ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.
 ב. הוכיחו: $\angle ABC = \angle ADE$.
 ג. הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.
 נתון: שטח המשולש ABC גדול פי 4 משטח המשולש ADE,
 $BC + ED = 15$.
 ד. (1) מצאו את אורך הצלע ED.
 (2) מצאו את אורך הצלע AB.

תשובה: א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. (1) 5 ס"מ. (2) 20 ס"מ.



- (4) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B (ראו סרטוט).
 המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D.
 המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.
 הקטע CE עובר דרך הנקודה B.
 א. הוכיחו כי $\triangle ACE \sim \triangle BCD$.
 נתון: $DC = FE$.
 ב. הוכיחו כי $\triangle BFE \cong \triangle BCD$.
 ג. (1) הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.
 (2) הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE.
 ד. הוכיחו כי $\angle DEC = \angle FCE$.

תשובה: הוכחה



5) נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.

מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:

הישר AB משיק למעגל בנקודה B,

הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O וחותך את המעגל בנקודות C ו-D,

הישר AG מאונך לישר AD (ראו סרטוט).

הנקודות B, D ו-G נמצאות על ישר אחד, כמתואר בסרטוט.

נסמן: $\angle ADB = \alpha$.

א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α .

ב. הוכיחו: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{BC}$.

נתון: $AG = 7$, $AC = \frac{1}{2}DC$.

ג. חשבו את R.

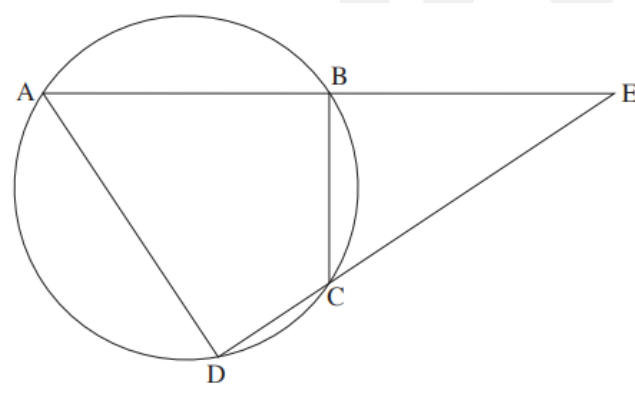
נסמן ב-S את שטח המשולש BDC.

ד. (1) הוכיחו: $\triangle ADG \sim \triangle BDC$.

(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.

תשובה: א. $\angle AGB = 90^\circ - \alpha$, $\angle ABG = 90^\circ - \alpha$, $\angle BAG = 2\alpha$.

ב. הוכחה. ג. $R = \frac{7}{\sqrt{3}}$. ד. (1) הוכחה. (2) $S_{\triangle ADG} = 3S$.



6) מרובע ABCD חסום במעגל.

המשכי הצלעות AB ו-DC נחתכים בנקודה E (ראו ציור).

נחתכים בנקודה E (ראו ציור).

א. הוכיחו: $\angle BAD = \angle BCE$.

ב. הוכיחו: $\triangle DEA \sim \triangle BEC$.

נתון: $\frac{AD}{BC} = \frac{5}{3}$.

$AB = 7.5$, $CE = 9$.

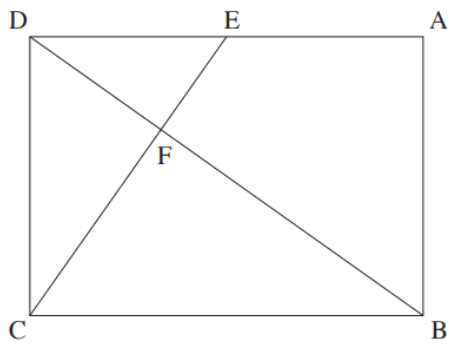
ג. מצאו את אורך הצלע BE.

נתון: $\angle BDC = \angle BEC$.

ד. (1) הוכיחו כי המשולש ACE הוא שווה שוקיים.

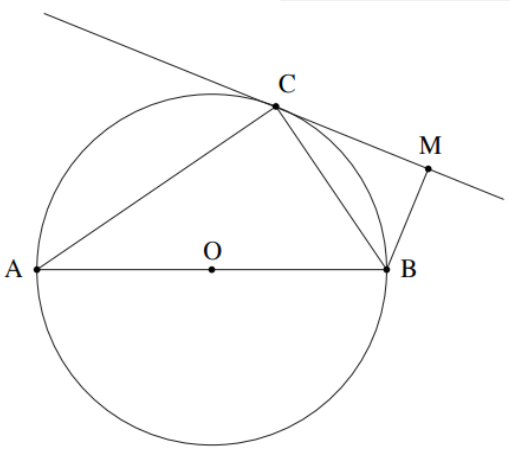
(2) הוכיחו כי AC הוא קוטר במעגל.

תשובה: א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. 7.5. ד. (1) הוכחה. (2) הוכחה.



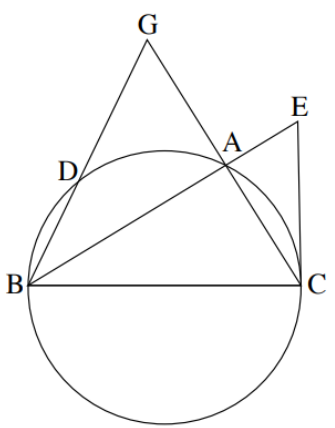
- (7)
- במלבן ABCD, הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
- הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F.
- המרובע EABF הוא בר חסימה במעגל.
- הוכיחו: $\triangle DAB \sim \triangle BFC$.
 - נתון: $DE = EA$.
 - חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.
- נסמן את שטח המשולש DEF ב- S.
- הביעו את שטחי המשולשים DFC ו- BFC באמצעות S.
 - חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC.
- נסמן: $DE = a$.
- הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a.
 - הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע EABF באמצעות a.

תשובה: א. הוכחה. ב. $\frac{1}{2}$. ג. $S_{DFC} = 2S, S_{BFC} = 4S$. ד. $\sqrt{\frac{3}{2}}$. ה. (1) $\sqrt{6}a$. (2) $\sqrt{3}a$.



- (8)
- בסרטוט שלפניך מתואר מעגל שמרכזו בנקודה O.
- AB הוא קוטר במעגל.
- דרך הנקודה C שעל המעגל, העבירו משיק למעגל.
- מן הנקודה B העבירו אנך למשיק, החותך אותו בנקודה M, כמתואר בסרטוט.
- הוכח: $\angle MBC = \angle CBA$.
 - הוכח: $BC^2 = AB \cdot BM$.
- דרך מרכז המעגל, O, העבירו ישר מקביל ל- BC.
- ישר זה חותך את AC בנקודה E.
- נתון: שטח המשולש ABC גדול פי 3.24 משטח המשולש CBM,
- $OE = 5$.
 - מצא את AB.

תשובה: א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $AB = 18$.



9) משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראה סרטוט).

הצלע BC היא קוטר במעגל.

AG הוא המשך הצלע CA.

הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D.

נתון: $GA = AC$.

א. הוכח כי הישר AB חוצה את $\angle GBC$.

ב. הוכח כי $\triangle GBC \sim \triangle GAD$.

נתון כי $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC.

ד. הדרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ז. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.

תשובה: א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $AC = \frac{1}{2}R$. ד. $\frac{16}{15}$.

10) בציור שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC, $BA = BC$.

מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K.

מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L.

נתון: $AL = LK = KC$.

א. חשב את $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו- EK נפגשים בנקודה G.

ב. הוכח כי המרובע BDGE הוא דלתון.

נתון: $AC = 45$.

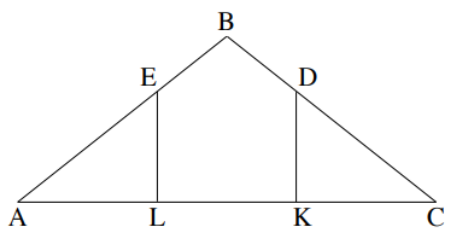
היקף המרובע EDKL הוא 54.

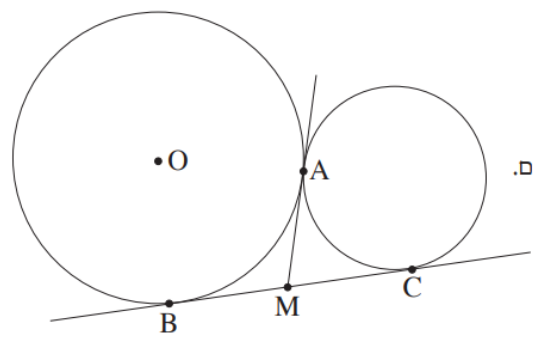
ג. חשב את אורך הקטע BG.

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על הישר BG שעבורה המרובע BDFE הוא בריחסימה במעגל?

נמק את תשובתך.

תשובה: א. $\frac{1}{2}$. ב. הוכחה. ג. 12. ד. כן.

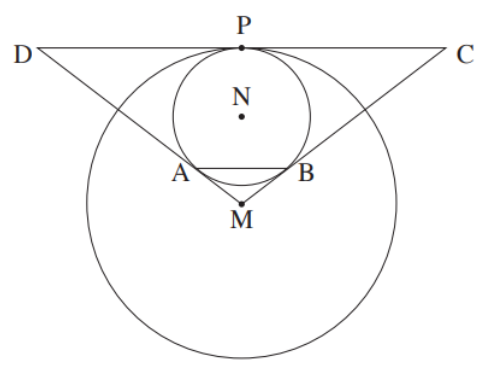




- 11) שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A (ראה סרטוט).
 הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי.
 מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים.
 B ו-C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשיק לשני המעגלים.
 שני המשיקים נחתכים בנקודה M.
 א. הוכח כי הזווית $\angle BAC$ ישרה.
 ב. הוכח כי $4 \cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$.
 נתון: $AB = 8$, $AC = 6$.
 ג. חשב את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O.
 ד. חשב את יחס השטחים $\frac{S_{\Delta OBM}}{S_{\Delta AMC}}$.

תשובה: א. הוכחה ב. הוכחה ג. $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ ד. $\frac{25}{18}$

- 12) שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראה סרטוט).
 מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו-N.
 הרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאמה, $R_2 < R_1$.
 מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.
 מן הנקודה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל שמרכזו N בנקודות A ו-B.



- ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים בנקודות C ו-D, כמתואר בסרטוט.
 א. הוכח כי $AB \perp MN$.
 ב. הוכח כי $AB \parallel DC$.
 ג. הוכח כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.
 נתון: $MN = 8$, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$.
 ד. (1) מצא את R_1 ואת R_2 .
 (2) מצא את DC.

תשובה: א. הוכחה ב. הוכחה ג. הוכחה ד. (1) $R_1 = 14$, $R_2 = 6$ (2) $DC = 12\sqrt{7}$

עבודת חופש לקראת תשפ"ד 5 יח"ל

טריגונומטריה

1) בסרטוט שלפניכם מתואר משולש ABC.

נתון: $BC = 1.5AC$,

$\angle ACB = 51^\circ$,

שטח המשולש ABC הוא 21.

א. מצאו את אורך הצלע AC.

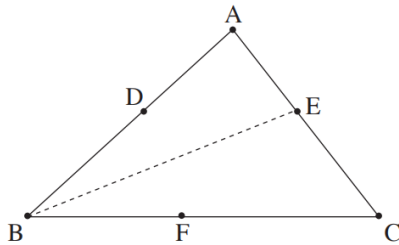
ב. מצאו את גודל הזווית ABC.

נתון: הנקודה E נמצאת על הצלע AC כך ש- BE חוצה את הזווית ABC.

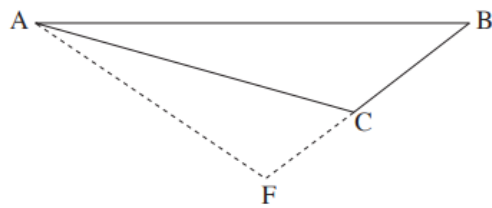
ג. מצאו את אורך BE.

נתון: הנקודות D ו- F נמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך שהמרובע BDEF הוא מעוין.

ד. מצאו את אורך צלע המעוין BDEF.



תשובה: א. 6 ס"מ. ב. 41.768° . ג. 7.359 ס"מ. ד. 3.938 ס"מ.



2) נתון משולש ABC (ראו ציור).

הצלע AB גדולה פי 3 מן הצלע BC.

נתון: $\angle ACB = 130^\circ$.

א. מצאו את גודל הזווית $\angle BAC$.

נתון כי שטח המשולש ABC הוא 23.

ב. מצאו את אורך הצלע BC.

האריכו את BC עד לנקודה F, כמתואר בציור, כך ש- $FC = 4$.

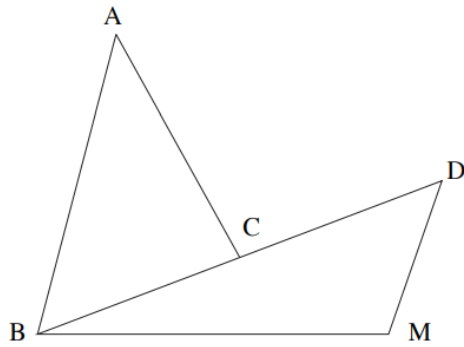
ג. חשבו את אורך AF.

הנקודה M נמצאת על AF, כך ש- CM חוצה את הזווית ACF.

ד. (1) מצאו את גודל הזווית $\angle CAF$.

(2) חשבו את אורך חוצה הזווית, CM.

תשובה: א. 14.79° . ב. 5.157 ס"מ. ג. 9.576 ס"מ. ד. (1) 18.66 ס"מ. (2) 5.395 ס"מ.



3) בסרטוט שלפניך מתוארים משולש BDM ומשולש ABC.

הנקודה C היא אמצע הצלע BD.

נתון: שטח המשולש ABC הוא 27.8,

$AB = 10$,

$\angle BAC = 44^\circ$.

א. מצא את אורך הצלע AC.

ב. מצא את אורך הצלע BC.

נתון: $BM = 11.4$,

$\angle BDM = 50^\circ$

$\angle BMD > 90^\circ$

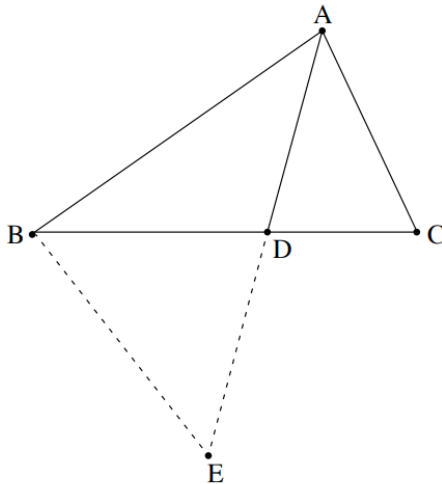
ג. מצא את גודל הזווית BMD.

מן הנקודה A העבירו חוצה זווית BAC החותך את הצלע BM בנקודה F.

ד. מצא את גודל זווית המשולש AFB.

תשובה: א. $AC = 8$. ב. $BC = 6.99$. ג. $\angle BMD = 110.12^\circ$.

ד. $\angle AFB = 85.46^\circ$, $\angle BAF = 22^\circ$, $\angle ABF = 72.54^\circ$.



4) לפניך משולש ABC (ראה סרטוט).

הנקודה D נמצאת על הצלע BC.

נתון: $AC = 1.5 \cdot CD$,

AD חוצה את הזווית BAC,

$\angle ADC = 75^\circ$.

א. מצא את גודל הזווית BAC.

נתון: $AC = 6$.

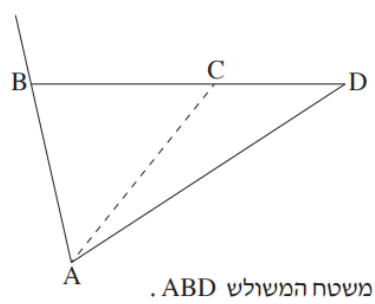
ב. מצא את אורך הקטע DB.

הנקודה E נמצאת על המשך הקטע AD, כמתואר בסרטוט.

שטח המשולש BDE הוא 19.

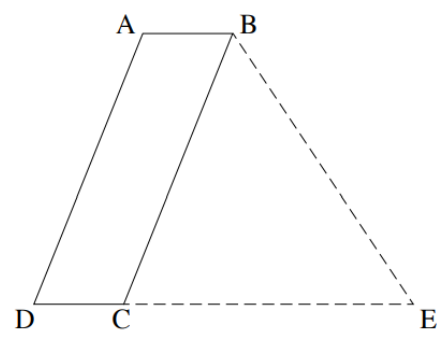
ג. מצא את אורך הצלע BE.

תשובה: א. 80.174° . ב. 6.328 . ג. 7.63



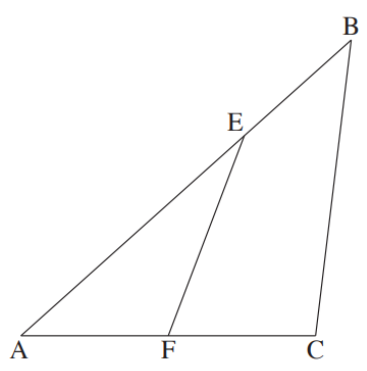
6) במשולש ABD הנקודה C נמצאת על הצלע BD (ראה ציור).
נתון: $AD = 10$, $CD = 4$, $AC = 7$.
א. חשב את גודל הזווית ACD.
נתון: $AB = BC$.
ב. חשב את שטח המשולש ABD.
הנקודה E נמצאת על המשך הצלע AB כך ששטח המשולש EBD קטן פי 4 משטח המשולש ABD.
ג. מהו אורך הצלע EB? נמק.

תשובה: א. 128.68° . ב. 26.226 סמ"ר. ג. 1.4 ס"מ.



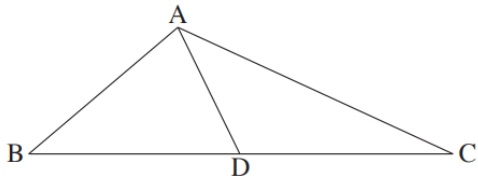
7) נתונה מקבילית ABCD, כמתואר בציור.
נתון: $\angle ABC = 68^\circ$, $BD = 28$, $AD = 3a$, $AB = a$.
א. מצא את a.
ב. חשב את זווית המשולש DBC.
הנקודה E נמצאת על המשך הצלע DC, כמתואר בציור.
נתון: שטח המשולש BED הוא 356.
ג. מצא את אורך הקטע CE.

תשובה: א. $a = 8$. ב. 112° , 15.36° , 52.64° . ג. 24



8) המשולש ABC בציור שלפניך הוא שווה שוקיים.
נתון: $AB = 12$, $CA = CB = 8$.
א. מצא את גודל הזווית BAC.
הנקודה F היא אמצע הצלע AC.
דרך הנקודה F העבירו ישר החותך את הצלע AB בנקודה E.
נתון: שטח המשולש EAF שווה ל-10.
ב. מצא את אורך הצלע AE.
ג. חשב את גודל הזווית ECB.
ד. חשב את שטח המרובע EBCF.

תשובה: א. 41.41° . ב. 7.56. ג. 32.17° . ד. 21.75



9 נתון משולש ABC (ראה סרטוט).

נתון: $\angle BAC = 120^\circ$, $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$.

א. חשב את גודל הזווית $\angle ABC$.

נתון: $BC = 12$.

AD הוא התיכון לצלע BC במשולש.

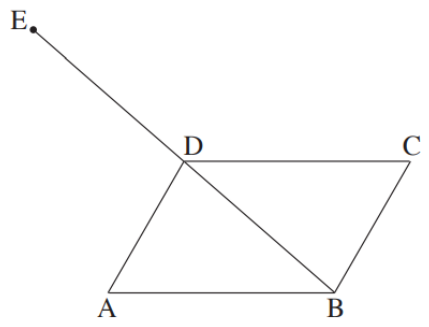
ב. חשב את אורך הקטע AD.

הנקודה F נמצאת באמצע הקטע AD והנקודה G נמצאת על הצלע AB.

נתון: שטח המשולש GAF שווה ל-2.

ג. חשב את אורך הקטע AG.

תשובה: א. 35.26° ב. 3.579 ג. 2.31



10 ABCD היא מקבילית.

נתון: $BC = 10$, $AB = 15$.

נסמן: $\angle DAB = \alpha$ ($\alpha < 90^\circ$).

א. הבע באמצעות α את שטח המשולש BAD.

נתון: שטח המקבילית הוא $75\sqrt{3}$.

ב. חשב את גודל הזווית α .

ג. חשב את אורך האלכסון BD.

הנקודה E נמצאת על המשך האלכסון BD, כמתואר בציור, כך ש- $ED = DB$.

ד. (1) מצא את גודל הזווית ABE.

תשובה: א. $75\sin \alpha$ ב. 60° ג. $5\sqrt{7}$ ד. 40.893° (1)