# <u>עבודת הגשה לחופשת הקיץ 2021</u>

**את העבודה יש <u>להגיש</u> בשיעור מתמטיקה הראשון בתחילת שנת הלימודים.**

**בתחילת השנה תתקיים <u>בחינה</u> על העבודה.**

דגשים להגשה:

את העבודה יש להגיש בצורה מסודרת, בכתב יד ברור בתוך קלסר חצי שקוף.

סרטוטים – באמצעות סרגל בלבד.

תשובות סופיות- להדגיש במרקר או מסגרת.

יש לכתוב את העבודה בעט שחור, כחול או עיפרון כהה בלבד.

העמוד הראשון של העבודה יוקדש לשער בו רשום שם התלמיד/ה והכתה.

**חופשה נעימה!**

## **פרק א': חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:**

1) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{-6x}{x^2-6x+9}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. (1) מצא לאילו ערכי $m$ אין פתרון למשוואה $\mathbf{f(x)=m}$.

(2) כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=m$ אם $\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$ ?

2) $f(x)$ היא פונקציה **שהנגזרת** שלה היא הפונקציה $\mathbf{f'(x)}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f'(x)$.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f'(x)$.

ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $f'(x)$.

ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.

ז. ידוע שתחום ההגדרה של $f(x)$ הוא כמו תחום ההגדרה של $f'(x)$.

(1) מצא את שיעורי ה-$x$ של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{5x-x^2}{x^2-6x+5}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים והסבר מדוע יש רק אסימפטוטה אחת המקבילה לציר ה-$y$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הישר $y=-\frac{1}{4}x$ עם הפונקציה הנ"ל.

4) לפונקציה $f(x) = \frac{(x+a)^2}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ב- $x = -\frac{1}{2}$.

א. מצא את שני הערכים האפשריים של $a$.

ב. עבור ה- $a$ השלילי שמצאת ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(4) מצא את האסימפטוטה המקבילה לציר ה- $x$.

(5) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $\mathbf{g(x) = -f(x)}$. מצא על סמך החקירה של $f(x)$ (בסעיף ב') את נקודות הקיצון של $g(x)$, את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ ואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה- $x$.

5) נתונה הפונקציה $y = \frac{ax^2-6x+1}{(x-1)^2}$. שיעור ה- $x$ של נקודת החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה שלה המקבילה לציר ה- $x$ הוא $1.5$.

א. מצא את $a$.

ב. מצא לגבי הפונקציה את נקודת הקיצון, את האסימפטוטות המקבילות לצירים ושרטט את הגרף שלה.

ג. מצא כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = k$ ולגרף הפונקציה אם:

(1) $k = 4$. (2) $k = 1$.

(3) $k < 0$. (4) $k > 5$.

6) לפונקציה $f(x) = \frac{ax^2+4x-18}{x^2-b}$ יש אסימפטוטה $y = 2$ ואסימפטוטה $x = -2$.

א. מצא את $a$ ו-$b$.

ב. מצא את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. מצא את תחומי העלייה הירידה.

ה. שרטט את גרף הפונקציה.

ו. $x_1$ הוא מספר בתחום $-2 < x < 2$ ו-$x_2$ הוא מספר בתחום $x > 2$.
נתון: $f(x_1) - f(x_2) = c$. באיזה תחום נמצא $c$? נמק.

7) הישר $x = 3$ הוא אסימפטוטה לפונקציה $f(x) = \frac{x+a}{bx-x^2}$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x = 1$.

א. מצא את $a$ ו-$b$ ואת נקודת הקיצון.

ב. מצא אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים ונקודת קיצון נוספת.

ג. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת תחומי העלייה הירידה.

ד. שרטט את גרף הפונקציה.

ה. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = (f(x))^2$. מצא עפ"י החקירה של $f(x)$ את הנקודות בהן הנגזרת של $g(x)$ מתאפסת.

8) נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2-3x+a}{x^2-3x+2}$. ישר המשיק לפונקציה בנקודה $x = -1$ חותך את ציר ה-$x$ בנקודה $x = \frac{7}{5}$.

א. הוכח: $a = 0$.

הצב בפונקציה $a = 0$ ומצא את:

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. האסימפטוטות לפונקציה המקבילות לצירים.

ה. נקודות הקיצון של הפונקציה.

ו. נקודת החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה המקבילה לציר ה-$x$.

9) נתונה הפונקציה $y = \frac{a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

10) נתונה הפונקציה $y = \frac{x-2}{x^2-a^2}$, $a > 2$.

א. הבע באמצעות $a$, במידת הצורך, ומצא: תחום הגדרה, אסימפטוטות המקבילות לצירים, נקודות חיתוך עם הצירים ותחומי עלייה וירידה.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

11) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = 2 - \frac{1}{x}$, בנקודה שנמצאת ברביע השני, שמקביל לישר העובר דרך הנקודות $(-6,3)$ ו-$(2,5)$.

12) מצא את משוואות שני המשיקים לגרף הפונקציה $y = \frac{x+3}{x+1}$ שמאונכים לישר $2x-y=5$.

13) לגרף הפונקציה $y = \frac{5x}{4} + \frac{1}{x}$ ברביע הראשון העבירו משיק בנקודה A ומשיק בנקודה B. שני המשיקים מאונכים זה לזה. נתון ששיעור ה-x של הנקודה A גדול פי 3 משיעור ה-x של הנקודה B.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B אם נתון ששיעור ה-x של הנקודה A הוא מספר שלם.

ב. מצא את משוואות שני המשיקים עבור הנקודות A ו-B שמצאת בסעיף א'.

14) המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x+a}{x+2}$ בנקודה $x = -5$ יוצר זוית של $45^o$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

א. מצא את a.

ב. מצא את משוואות שני המשיקים לגרף הפונקציה שיוצרים זוית של $45^o$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

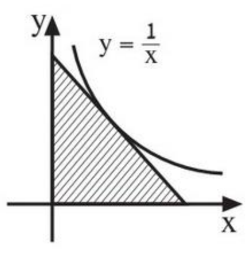
<u>הערה</u>: ישר היוצר זוית של 45 מעלות עם הכיוון החיובי של ציר x שיפועו שווה ל-1. $(m=1)$.

15) א. הראה ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}$ בנקודה $x = 1$ הוא 3.

ב. רשום את משוואת המשיק בנקודה $x = 1$ בעזרת a.

ג. מצא את a אם המשיק עובר דרך הנקודה $(2,5)$. (הנקודה לא על גרף הפונקציה).

16) לגרף הפונקציה $y = \frac{1}{x}$, ברביע הראשון, העבירו משיק בנקודה $(a, \frac{1}{a})$.



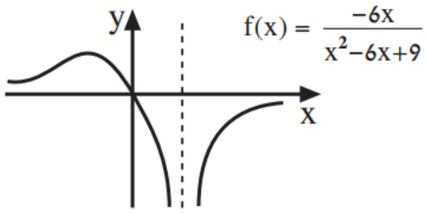

א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

ב. הראה ששטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים לא תלוי ב-a ומצא אותו.

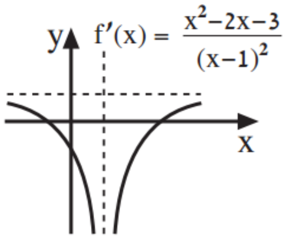
ג. מצא את נקודת ההשקה אם סכום אורכי הקטעים שהמשיק חותך מהצירים הוא 5.

## <u>פרק א׳: חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי-תשובות:</u>

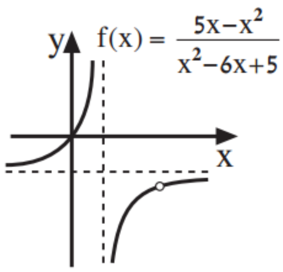
1) א. $x \neq 3$. ב. $(-3, \frac{1}{2})$ מקסימום.
ג. עולה: $x < -3$ או $x > 3$, יורדת:
$-3 < x < 3$. ד. $(0,0)$. ה. $x = 3$,
$y = 0$. ז. (1) $m > \frac{1}{2}$. (2) שניים.



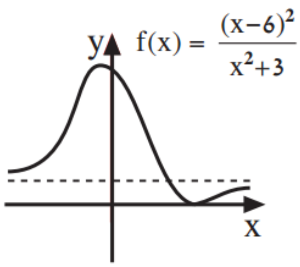

2) א. $x \neq 1$. ב. אין. ג. עולה: $x > 1$,
יורדת: $x < 1$. ד. $(0,-3)$, $(3,0)$, $(-1,0)$.
ה. $x = 1$, $y = 1$. ז. (1) $x = 3$ מינימום,
$x = -1$ מקסימום. (2) עולה: $x > 3$ או
$x < -1$, יורדת: $1 < x < 3$ או $-1 < x < 1$.



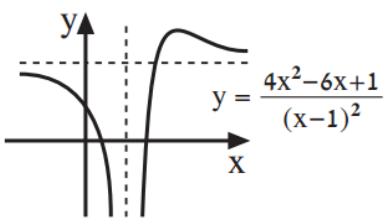

3) א. $x \neq 5$, $x \neq 1$. ב. $x = 1$,
$y = -1$. ג. $(0,0)$. ד. אין.
ה. עולה: $x < 1$ או $1 < x < 5$
או $x > 5$. ז. $(0,0)$.

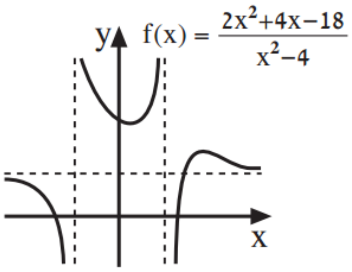



4) א. $a = -6$ או $a = \frac{1}{2}$. ב. (1) $(0,12)$,
$(6,0)$. (2) $(-\frac{1}{2}, 13)$ מקסימום, $(6,0)$
מינימום. (3) עולה: $x < -\frac{1}{2}$ או $x > 6$, יורדת:
$-\frac{1}{2} < x < 6$. (4) $y = 1$. ג. $(-\frac{1}{2}, -13)$ מינימום,
$(6,0)$ מקסימום; עולה: $-\frac{1}{2} < x < 6$, יורדת:
$x < -\frac{1}{2}$ או $x > 6$; $y = -1$.

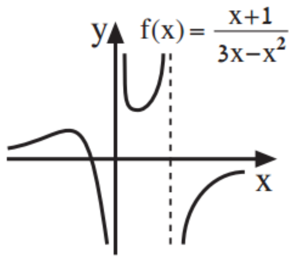



5) א. $a = 4$. ב. $(2,5)$
מקסימום, $x = 1$, $y = 4$.
ג. (1) אחת. (2) שתיים.
(3) שתיים. (4) אפס.



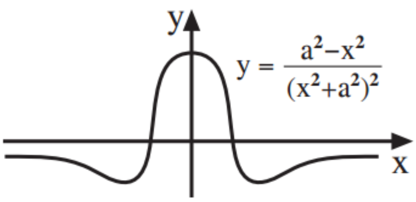



6) א. $a = 2$, $b = 4$. ב. $x \neq 2$, $x \neq -2$;
$(2.16,0)$, $(-4.16,0)$, $(0,4.5)$. ג. $(4,2.5)$
מקסימום, $(1,4)$ מינימום. ד. עולה:
$1 < x < 2$ או $2 < x < 4$, יורדת: $x < -2$
או $-2 < x < 1$ או $x > 4$. ו. $c \geq 1.5$.

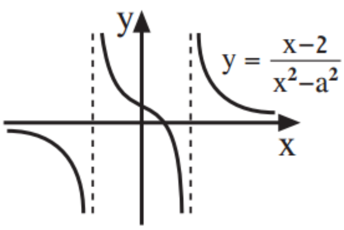



7) א. $a = 1$, $b = 3$; $(1,1)$ מינימום.
ב. $x = 0$, $y = 0$; $(-3,\frac{1}{9})$ מקסימום.
ג. $(-1,0)$; עולה: $x < -3$ או $1 < x < 3$
או $x > 3$, יורדת: $-3 < x < 0$ או $0 < x < 1$.
ה. $(1,1)$, $(-3,\frac{1}{81})$, $(-1,0)$.

8) ב. $x \neq 1$, $x \neq 2$. ג. $(0,0)$, $(3,0)$. ד. $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$. ה. $(1.5,9)$ מינימום.
ו. אין.




9) א. כל x. ב. $(0,\frac{1}{a^2})$, $(a,0)$, $(-a,0)$.
ג. $(0,\frac{1}{a^2})$ מקסימום, $\left(\sqrt{3}a,-\frac{1}{8a^2}\right)$ מינימום,
$\left(-\sqrt{3}a,-\frac{1}{8a^2}\right)$ מינימום. ד. $y = 0$.




10) א. $x \neq a$, $x \neq -a$;
$x = a$, $x = -a$, $y = 0$;
$(0,\frac{2}{a^2})$, $(2,0)$; יורדת:
$x < -a$ או $-a < x < a$
או $x > a$.

11) $y = \frac{1}{4}x+3$. 12) $y = -\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}$.

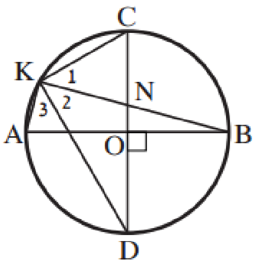
13) א. $A(2,3)$, $B(\frac{2}{3},2\frac{1}{3})$. ב. $y = x+1$, $y = -x+3$.

14) א. $-7$. ב. $y = x-3$, $y = x+9$. 15) ב. $y = 3x+a-4$. ג. 3.

16) א. $(2a,0)$, $(0,\frac{2}{a})$. ב. 2. ג. $(2,\frac{1}{2})$ או $(\frac{1}{2},2)$.

## **פרק ב': גיאומטריה:**

1) AB ו-CD הם קטרים במעגל שמרכזו O הניצבים זה לזה.
K היא נקודה על הקשת AC.

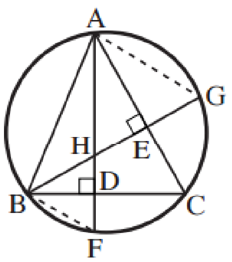



א. הוכח: $\sphericalangle K_1 = \sphericalangle K_2 = \sphericalangle K_3$. (ראה את סימון הזויות בציור).

ב. נתון: $\sphericalangle KCD = 60^\circ$. חשב את הזוית KAB.

ג. (ללא קשר לנתון של סעיף ב') הוכח: $\sphericalangle KAB = \sphericalangle KNC$.
(N היא נקודת החיתוך של הקוטר CD והמיתר BK).

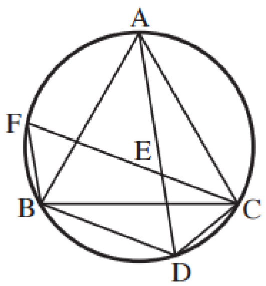
2) המשולש ABC חסום במעגל. AD ו-BE הם גבהים במשולש שנחתכים בנקודה H שנמצאת בתוך המשולש. המשכי הגבהים חותכים את המעגל בנקודות F ו-G.




א. הוכח: AH = AG, BH = BF.

ב. שרטט בציור את הקטע CH והמשך אותו מהצד של H עד שיחתוך את המעגל בנקודה שתסומן ב-I. הוכח: BF = BI.

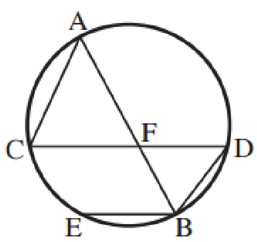
3) ABC הוא משולש שווה צלעות החסום במעגל.
D היא נקודה כלשהי על הקשת BC. המיתר CF מקביל למיתר BD וחותך את המיתר AD בנקודה E.




הוכח: א. המשולש DCE הוא שווה צלעות.

ב. המרובע FEDB הוא מקבילית.

4) AB הוא קוטר במעגל. CD ו-BE הם שני מיתרים המקבילים זה לזה.
AB ו-CD נחתכים בנקודה F.
נתון: $\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{BD}$.

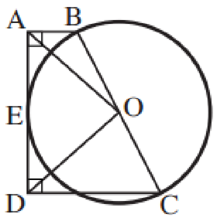



הוכח:

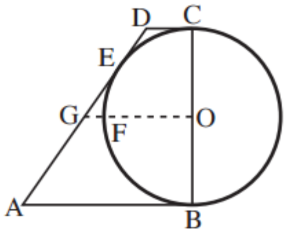
א. המשולש ACF הוא שווה שוקיים.

ב. המרובע FDBE הוא מעוין.

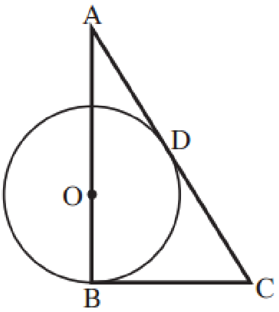
5) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\sphericalangle A = 90^o$).
השוק AD משיקה למעגל שמרכזו O בנקודה E
והשוק BC היא קוטר במעגל.
א. הוכח: $AO = DO$.
ב. הוכח: $AB + DC = BC$.



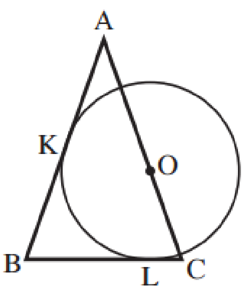

6) BC הוא קוטר במעגל שמרכזו O. שלוש מצלעות המרובע
ABCD משיקות למעגל בנקודות B, C ו-E. ($\sphericalangle A < 90^o$).
הנקודה G היא על הצלע AD והקטע GO חותך את
המעגל בנקודה F. נתון: $GO \parallel AB$.
א. הוכח שהמרובע ABCD הוא טרפז ושהקטע GO הוא
קטע האמצעים.
ב. נתון: $GF = 1$ ס״מ והיקף הטרפז ABCD הוא 34 ס״מ. חשב את רדיוס המעגל.



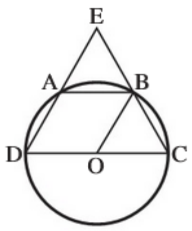

7) הצלע AB של המשולש ABC עוברת
דרך מרכז המעגל O. הצלע AC משיקה
למעגל בנקודה D והצלע BC משיקה
למעגל בנקודה B. נתון: $\sphericalangle A = 30^o$.
א. הוכח: (1) $AD = CD$. (2) $AO = CO$.
ב. חשב את היחס: $\frac{OB}{AB}$.



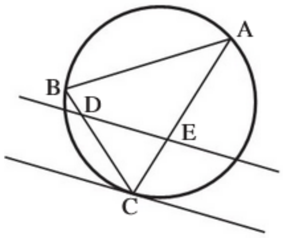

8) הצלע AC של משולש שווה שוקיים ABC ($AB = AC$)
עוברת דרך מרכז המעגל O. הצלע AB משיקה למעגל
בנקודה K והצלע BC משיקה למעגל בנקודה L.
נתון שהנקודה K היא אמצע הצלע AB.
א. חשב את זויות המשולש ABC.
ב. נתון: $BL = m$, $LC = n$.
הבע באמצעות m ו-n את היקף המשולש ABC.



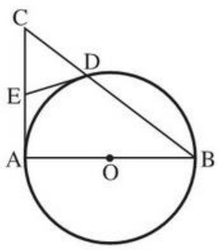
9) במעגל שמרכזו $O$ חסום מרובע $ABCD$. $DC$ הוא קוטר.
המשכי הצלעות $DA$ ו-$CB$ נפגשים בנקודה $E$.
נתון: $OB \parallel DE$, $\sphericalangle BOC = \alpha$.
א. הבע באמצעות $\alpha$ את הזווית $ABO$.
ב. נתון ששטח המשולש $OBC$ שווה לשטח המשולש $BEA$.
הוכח: $\Delta OBC \cong \Delta BEA$.
ג. מה גודל הזווית $\alpha$? נמק.



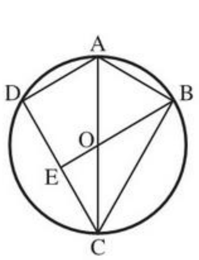

10) המשולש $ABC$ חסום במעגל. $E$ היא נקודה על הצלע $AC$.
דרך הנקודה $E$ העבירו מקביל לישר שמשיק למעגל
בנקודה $C$. המקביל חותך את הצלע $BC$ בנקודה $D$.
א. הוכח: $\Delta DEC \sim \Delta ABC$.
ב. נתון: $DC = 3BD$, $AE = 2CE$, שטח המשולש $ABC$
הוא $S$. הבע באמצעות $S$ את שטח המרובע $ABDE$.
ג. הוכח: $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBE$.



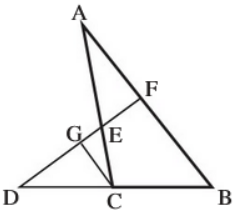

11) במשולש ישר זווית $ABC$ $(\sphericalangle BAC = 90^\circ)$ הניצב $AB$
הוא קוטר במעגל שמרכזו $O$. היתר $BC$ חותך את
המעגל גם בנקודה $D$. המשיק למעגל בנקודה $D$ חותך
את הניצב $AC$ בנקודה $E$.
א. הוכח: $CE = EA$.
ב. נתון: $\frac{CD}{EA} = \frac{4}{3}$ וכן ששטח המשולש $CDE$ הוא
4 סמ"ר. מצא את שטח המשולש $ABD$. נמק.




12) המרובע $ABCD$ הוא דלתון החסום במעגל $(AB = AD)$,
$(BC = DC)$. $E$ היא נקודה על $DC$ כך ש-$BE$ מאונך ל-$DC$.
$BE$ ו-$AC$ נחתכים בנקודה $O$.
א. הוכח: המשולש $ABO$ הוא שווה שוקיים.
ב. נתון ששטח המשולש $ABO$ שווה לשטח המשולש $CBO$.
(1) הוכח שהנקודה $O$ היא מרכז המעגל.
(2) מצא את גודל הזווית $BCD$.
ג. נסמן: $S_{ABCD} = S$. הבע באמצעות $S$ את שטח המרובע $AOED$.



13) במשולש ABC הנקודה F היא אמצע הצלע AB.
הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC. הקטע DF
חותך את הצלע AC בנקודה E. דרך הקודקוד C
העבירו ישר שמקביל ל-AB וחותך את DF בנקודה G.

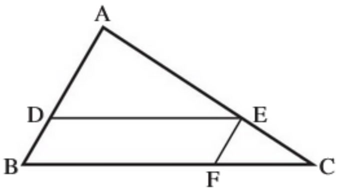



א. הוכח: $\frac{EC}{AE} = \frac{DC}{DB}$.

ב. נתון: $\frac{EC}{AE} = \frac{1}{2}$. הוכח: $CF \parallel AD$.

ג. נתון: $S_{GCE} = s$. הבע באמצעות s את שטח המשולש ABC.

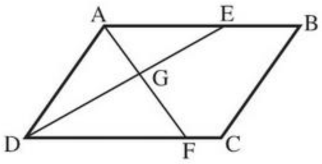
14) בתוך משולש ABC חסומה מקבילית BDEF
כמתואר בציור. נתון ששטח המשולש ADE
הוא $S_1$ ושטח המשולש EFC הוא $S_2$.




א. הבע באמצעות $S_1$ ו-$S_2$ את היחס $\frac{BF}{FC}$. נמק.

ב. הוכח ששטח המקבילית BDEF הוא: $2\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

15) במקבילית ABCD הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה
על הצלעות AB ו-DC. הקטעים AF ו-DE נחתכים
בנקודה G. נתון: AE = 3 ס״מ, EB = 2 ס״מ,
$S_{AGE} : S_{FGD} = 9 : 16$.




א. חשב את DF ו-CF. נמק את חישוביך.

ב. חשב את היחס $S_{AGD} : S_{BEGFC}$.