עבודת קיץ – שכבת י' – 4 יח"ל

את העבודה יש להגיש בשיעור מתמטיקה הראשון בתחילת שנת הלימודים והיא מהווה חזרה על הנושאים שנלמדו לאורך השנה
בתחילת השנה תתקיים בחינה על העבודה.

דגשים להגשה:

את העבודה יש להגיש בצורה מסודרת, בכתב יד ברור בתוך קלסר חצי שקוף.
סרטוטים – באמצעות סרגל בלבד.
תשובות סופיות- להדגיש במרקר או מסגרת.
יש לכתוב את העבודה בעט שחור, כחול או עיפרון כהה בלבד.
העמוד הראשון של העבודה יוקדש לשער בו רשום שם התלמיד/ה והכתה.

כמו כן, להלן הנושאים המופיעים בעבודה ועליהם יתקיים המבחן בתחילת שנה וגם מבחן המעבר בסוף הקיץ :

חדו"א:

- פונקציית פולינום (עם ובלי פרמטרים) – כולל הזזה של פונקציה, גרף הנגזרת ובעיות עם הישר $y = k$.
- פונקציית מנה (עם ובלי פרמטרים)
- משיקים לפונקצייה (עם ובלי פרמטרים)

גיאומטריה:

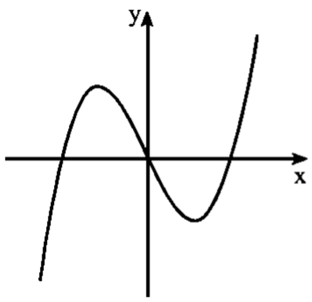
- משפט תלס
- משפט חוצה זווית
- דמיון משולשים (כולל יחס גבהים ויחס שטחים במשולשים דומים)
- המעגל - זוויות מרכזיות, קשתות, מיתרים, זוויות היקפיות, האנך ממרכז המעגל למיתר, מיתרים שווים ומרחקם ממרכז המעגל.

חופשה נעימה!

פרק א': חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:

1. לגרף הפונקציה $y=x^3-ax^2+36x$ יש נקודת קיצון ב- $x=2$.
א. חשב את a.
ב. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ה. היעזר בגרף ורשום את ערכי x שעבורם הפונקציה שלילית.

2. נתונה הפונקציה $y=x^3-2x^2+x$.
א. חקור את הפונקציה ומצא: נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. מצא עבור אילו ערכי k חותך הישר $y=k$ את גרף הפונקציה:
(1) בשלוש נקודות. (2) בשתי נקודות. (3) בנקודה אחת.



3. לפניך גרף הפונקציה $f(x)=x^3-12x$.
א. מצא את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
ב. כמה פתרונות יש למשוואות הבאות:
(1) $f(x)=17$. (2) $f(x)=2$. (3) $f(x)=-16$.
ג. כמה פתרונות יש למשוואה $x^3-12x=8$?

4. נתונה הפונקציה $y=x^2(1-x)^4$.
חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:
א. נקודות קיצון. ב. תחומי עלייה וירידה. ג. נקודות חיתוך עם הצירים.
ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ה. קבע אם הפונקציה היא זוגית או אי זוגית.
ו. שרטט סקיצה של גרף הנגזרת של הפונקציה.

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{-6x}{x^2-6x+9}$.
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{5x-x^2}{x^2-6x+5}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים והסבר מדוע יש רק אסימפטוטה אחת המקבילה לציר ה-y.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (אם יש כאלה).

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הישר $y = -\frac{1}{4}x$ עם הפונקציה הנ"ל.

7. לפונקציה $f(x) = \frac{(x+a)^2}{x^2+3}$ יש נקודת קיצון ב-$x = -\frac{1}{2}$.

א. מצא את שני הערכים האפשריים של a.

ב. עבור ה-a השלילי שמצאת ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(4) מצא את האסימפטוטה המקבילה לציר ה-x.

(5) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8. לפונקציה $f(x) = \frac{ax^2+4x-18}{x^2-b}$ יש אסימפטוטה $y = 2$ ואסימפטוטה $x = -2$.

א. מצא את a ו-b.

ב. מצא את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. מצא את תחומי העלייה הירידה.

ה. שרטט את גרף הפונקציה.

9. הישר $x = 3$ הוא אסימפטוטה לפונקציה $f(x) = \frac{x+a}{bx-x^2}$. לפונקציה נקודת קיצון ב-$x = 1$.

א. מצא את a ו-b ואת נקודת הקיצון.

ב. מצא אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים ונקודת קיצון נוספת.

ג. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת תחומי העלייה הירידה.

ד. שרטט את גרף הפונקציה.

10. נתונה הפונקציה $y = \frac{a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

11. נתונה הפונקציה $y = \frac{x-2}{x^2-a^2}$, $a > 2$.

א. הבע באמצעות a, במידת הצורך, ומצא: תחום הגדרה, אסימפטוטות המקבילות לצירים, נקודות חיתוך עם הצירים ותחומי עלייה וירידה.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = 2 - \frac{1}{x}$, בנקודה שנמצאת ברביע השני, שמקביל לישר העובר דרך הנקודות $(-6,3)$ ו-$(2,5)$.

13. מצא את משוואות שני המשיקים לגרף הפונקציה $y = \frac{x+3}{x+1}$ שמאונכים לישר $2x-y = 5$.

14. המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x+a}{x+2}$ בנקודה $x = -5$ יוצר זוית של 45^o עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

א. מצא את a.

ב. מצא את משוואות שני המשיקים לגרף הפונקציה שיוצרים זוית של 45^o עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

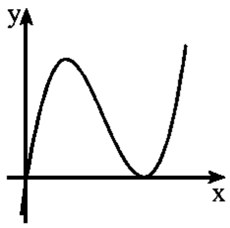
הערה: ישר היוצר זווית של 45 מעלות עם הכיוון החיובי של ציר x שיפועו שווה ל- 1 $(m = 1)$.

15. א. הראה ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}$ בנקודה $x = 1$ הוא 3.

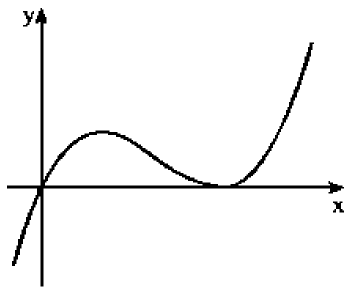
ב. רשום את משוואת המשיק בנקודה $x = 1$ בעזרת a.

ג. מצא את a אם המשיק עובר דרך הנקודה $(2,5)$. (הנקודה לא על גרף הפונקציה).

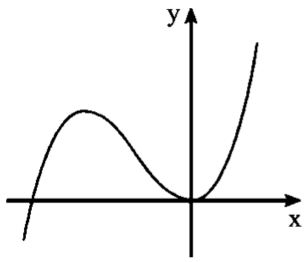
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי - תשובות:



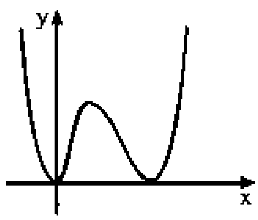
1. **א.** 12.
ב. $(6;0)$ מינימום, $(2;32)$ מקסימום.
ג. $(0;0)$, $(6;0)$.
ה. $x<0$.



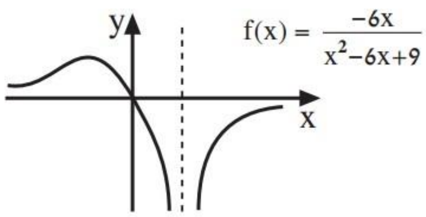
2. **א.** נקודות קיצון: $(\frac{1}{3};\frac{4}{27})$ מקסימום,
$(1;0)$ מינימום.
נקודות חיתוך: $(0;0)$, $(1;0)$.
ג. **(1)** $0<k<\frac{4}{27}$. **(2)** $k=0$ או
$k=\frac{4}{27}$. **(3)** $k>\frac{4}{27}$ או $k<0$.



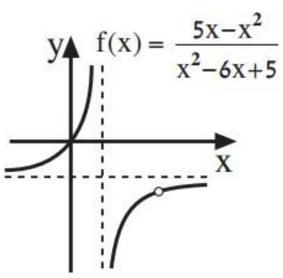
3. **א.** 3.
ב. $(0;0)$ מינימום,
$(-2;4)$ מקסימום.
ג. $(0;0)$, $(-3;0)$.



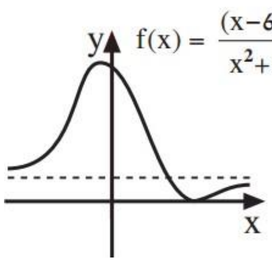
4. **א.** $(0;0)$ מינימום, $(\frac{1}{3};\frac{16}{729})$ מקסימום,
$(1;0)$ מינימום.
ב. עלייה: $x>1$ או $0<x<\frac{1}{3}$,
ירידה: $x<0$ או $\frac{1}{3}<x<1$.
ג. $(0;0)$, $(1;0)$.



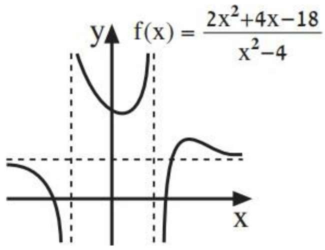
5. א. $x\neq 3$. ב. $\left(-3,\frac{1}{2}\right)$ מקסימום.
ג. עולה: $x<-3$ או $x>3$, יורדת:
$-3<x<3$. ד. $(0,0)$. ה. $x=3$,
$y=0$.



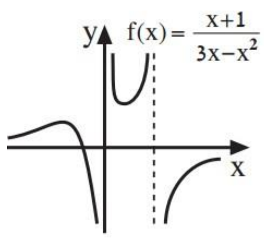
6. א. $x\neq 5$, $x\neq 1$. ב. $x=1$,
$y=-1$. ג. $(0,0)$. ד. אין.
ה. עולה: $x<1$ או $1<x<5$
או $x>5$. ז. $(0,0)$.



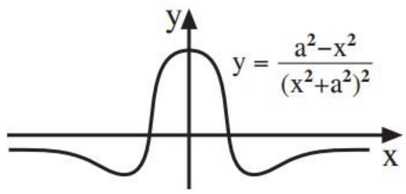
7. א. $a = -6$ או $a = \frac{1}{2}$. ב. (1) $(0,12)$,
$(6,0)$. (2) $(-\frac{1}{2},13)$ מקסימום, $(6,0)$
מינימום. (3) עולה: $x \le -\frac{1}{2}$ או $x > 6$, יורדת:
ב. $y = 3x+a-4$. ג. 3.
$-\frac{1}{2} < x < 6$. (4) $y = 1$.



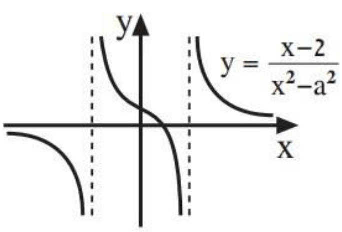
8. א. $a = 2$, $b = 4$. ב. $x \neq 2$, $x \neq -2$;
$(2.16,0)$, $(-4.16,0)$, $(0,4.5)$. ג. $(4,2.5)$
מקסימום, $(1,4)$ מינימום. ד. עולה:
$1 < x < 2$ או $2 < x < 4$, יורדת: $x < -2$
או $-2 < x < 1$ או $x > 4$.



9. א. $a = 1$, $b = 3$; $(1,1)$ מינימום.
ב. $x = 0$, $y = 0$; $(-3,\frac{1}{9})$ מקסימום.
ג. $(-1,0)$; עולה: $x < -3$ או $1 < x < 3$
או $x > 3$, יורדת: $-3 < x < 0$ או $0 < x < 1$.



10 א. כל x. ב. $(0,\frac{1}{a^2})$, $(a,0)$, $(-a,0)$.
ג. $(0,\frac{1}{a^2})$ מקסימום, $\left(\sqrt{3}a,-\frac{1}{8a^2}\right)$ מינימום,
$\left(-\sqrt{3}a,-\frac{1}{8a^2}\right)$ מינימום. ד. $y = 0$.



11 א. $x \neq a$, $x \neq -a$;
$x = a$, $x = -a$, $y = 0$;
$(0,\frac{2}{a^2})$, $(2,0)$; יורדת:
$x < -a$ או $-a < x < a$
או $x > a$.

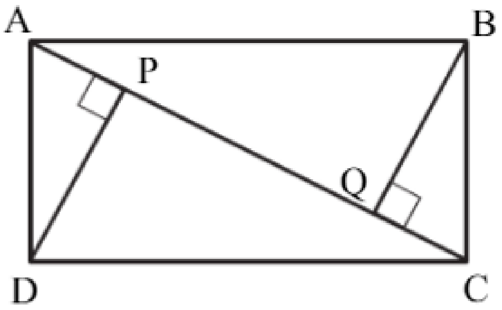
12. $y = \frac{1}{4}x+3$.

13. $y = -\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}$.

14. ב. $y = 3x+a-4$. ג. 3. $y = x+9$.

15. ...

פרק ב': גיאומטריה:



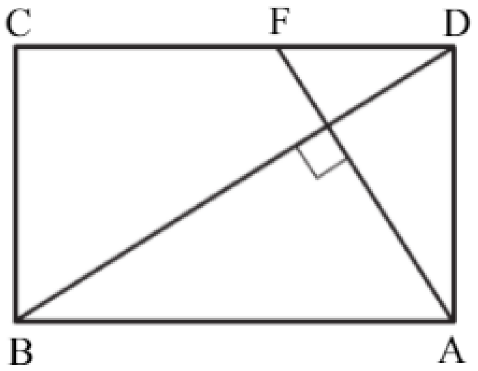
1. במלבן $ABCD$, הקטעים BQ ו- DP מאונכים לאלכסון AC (ראה ציור).

נסמן $\alpha = \sphericalangle BAQ$. הוכח:

א. $\Delta APD \sim \Delta BQA$.

ב. $PD = BQ$.

ג. $BQ^2 = AP \cdot AQ$.



2. במלבן $ABCD$, הנקודה F נמצאת על הצלע CD כך שהקטע AF מאונך לאלכסון BD.

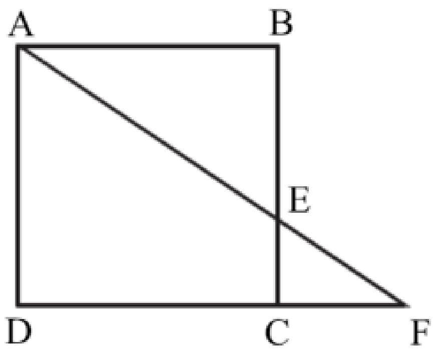
הוכח:

א. $\Delta ADF \sim \Delta DCB$.

ב. $DF \cdot CD = AD^2$.

נתון: $FD =$ 4 ס"מ , $CD =$ 9 ס"מ.

ג. מצא את אורך הצלע AF.



3. נתון ריבוע $ABCD$.

נתון: $\frac{CE}{AB} = \frac{1}{2}$.

הוכח:

א. $\Delta ABE \sim \Delta FCE$.

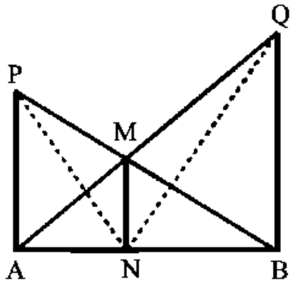
נתון $S_{\Delta ECF} =$ 3 סמ"ר.

ב. מצא את $S_{\Delta ABE}$.

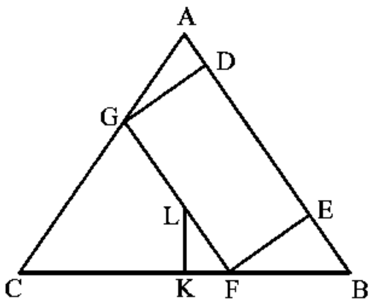
נסמן: $BE = 2a$.

ג. הבע באמצעות a את שטח הריבוע $ABCD$.

4. בציור שלפניך הקטעים AP, MN ו- BQ מאונכים לקטע AB.
PB ו- AQ נחתכים בנקודה M.
א. הוכח: $\frac{AP}{BQ}=\frac{AN}{BN}$.
ב. הוכח: $\Delta APN \sim \Delta BQN$.



5. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AC=AB)$ חסום מלבן $GFED$ (ראה ציור).
נקודה L, הנמצאת על צלע המלבן GF, היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
דרך הנקודה L העבירו אנך לצלע BC, החותך את BC בנקודה K.
א. הוכח: $\Delta KAB \sim \Delta KLF \sim EFB$.
ב. נתון: $BC=18$ ס"מ, $AB=15$ ס"מ.
חשב את אורכי הקטעים KF ו- EF.



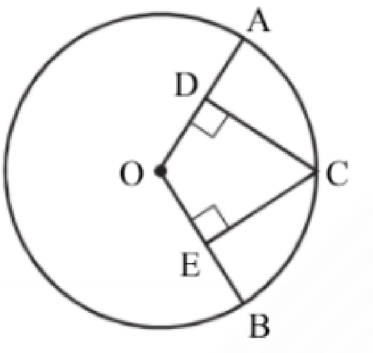
6. מנקודה C הנמצאת על הקשת AB של מעגל שמרכזו בנקודה O מורידים אנכים CD ו- CE לרדיוסים OA ו- OB.

נתון: $CD = CE$.

הוכח:

א. $\Delta ODC \cong \Delta OEC$.

ב. הנקודה C היא אמצע הקשת AB.



7. הנקודות A ו- B נמצאות על המעגל שמרכזו בנקודה O.

נתון: $AC \perp BC$, $AD = DB$.

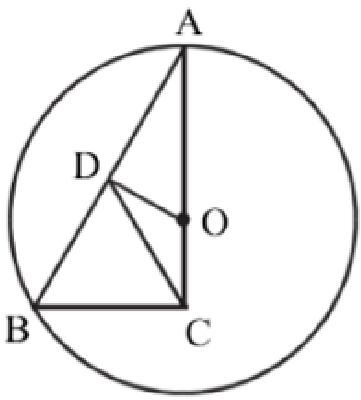
הוכח:

א. $AD = CD$.

נסמן $\sphericalangle DAC = \alpha$.

ב. הוכח: $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BCD$.

ג. נתון גם $OC = OD$. חשב את $\sphericalangle A$.



8. המשולש ΔABC הוא משולש שווה-צלעות החסום

במעגל שמרכזו בנקודה O. נתון: $OD \perp AB$,

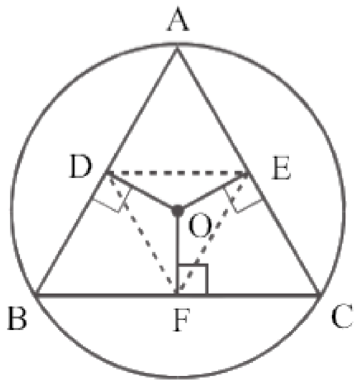
$OF \perp BC$, $OE \perp AC$.

הוכח:

א. המשולש ΔDEF הוא שווה צלעות.

ב. היקף המשולש ΔABC גדול פי 2 מהיקף

המשולש ΔDEF.



9. הנקודות A, B, C ו- D נמצאות

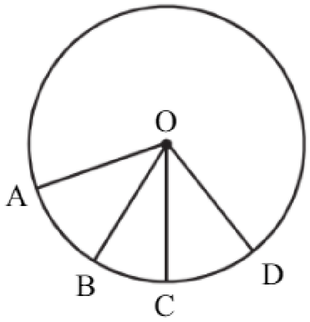
על מעגל שמרכזו בנקודה O.

נתון: $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$.

א. הוכח: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

ב. הוכח: $AC = BD$.

ג. הוכח: $\Delta AOC \cong \Delta BOD$



10. הנקודות A, B, C ו- D נמצאות על מעגל

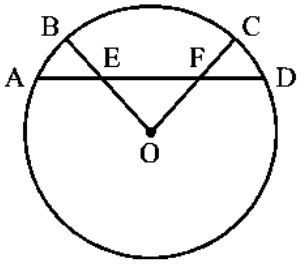
שמרכזו בנקודה O. הרדיוסים OB ו- OC

חותכים את המיתר AD בנקודות E ו- F.

נתון: $AE = FD$.

א. הוכח: $OE = OF$.

ב. הוכח: $AB = CD$.



11. המשולש ABC הוא משולש שווה צלעות

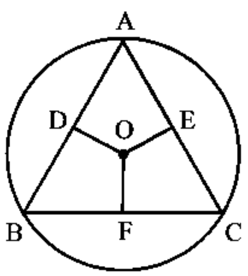
החסום במעגל שמרכזו בנקודה O.

הנקודות D, E ו- F הן בהתאמה

אמצעי המיתרים AB, AC ו- BC.

א. הוכח: $OD = OE = OF$.

ב. הוכח: המרובע BDEF הוא מעוין.



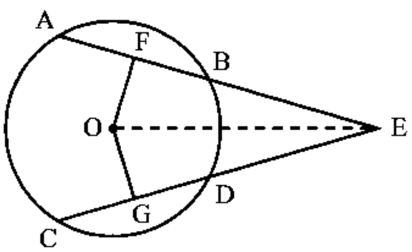
12. המשכי המיתרים AB ו- CD של מעגל

שמרכזו O נפגשים בנקודה E.

נתון: $AB = CD$, $OF \perp AB$, $OG \perp CD$.

א. הוכח: $FE = GE$.

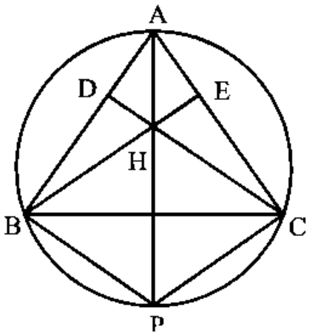
ב. הוכח: $BD \parallel FG$.



13. המשולש ABC חסום במעגל. AP הוא קוטר במעגל. BE הוא גובה לצלע AC ו- CD הוא גובה לצלע AB. BE ו- CD נחתכים בנקודה H שעל הקוטר AP.

א. הוכח: $DC \parallel BP$.

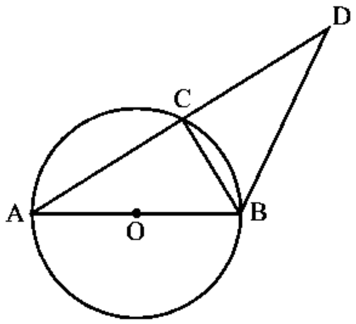
ב. הוכח שהמרובע $BHCP$ הוא מעוין.



14. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו בנקודה O. נקודה D נמצאת על המשך המיתר AC כך ש- $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBC$.

א. הוכח: $AC = DC$.

ב. נקודה E נמצאת באמצע הקטע BD. הוכח: $CE \parallel AB$.



15. המלבן $ABCD$ חסום במעגל. E היא נקודה על הקשת DC כך ש- $\sphericalangle ABD = \sphericalangle EBD$.

א. הוכח: $AB = BE$.

ב. הוכח: $DE = BC$.